Научная статья

УДК 512.56
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-5-72

ТЕОРЕТИКО – МНОЖЕСТВЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ n – СИМПЛЕКСОВ

Валерий Георгиевич Бардаков [1]
Богдан Бахтиярович Чужинов[2]
Иван Александрович Емельяненков[3]
Максим Эдуардович Иванов[4]
Татьяна Анатольевна Козловская[5]
Вадим Эдуардович Лешков[6]

[2,3,4,6] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия
[1,2] Национальный исследовательский Томский государственный университет,634050, Томск, Россия
[1,5] Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, 630090, Новосибирск, Россия
[1] Новосибирский государственный аграрный университет, 630039, Новосибирск, Россия

[1] bardakov@math.nsc.ru
[2] b.chuzhinov@g.nsu.ru
[3] i.emelianenkov@g.nsu.ru
[4] m.ivanov2@g.nsu.ru
[5] t.kozlovskaya@math.tsu.ru
[6] v.leshkov@g.nsu.ru

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.5-72
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-72

Аннотация

Уравнение n-симплекса (n-SE) было введено А. Б. Замолодчиковым как обобщение уравнения Янга-Бакстера, являющегося, в этих терминах, уравнением 2-симплекса. В данной статье мы предлагаем некоторые общие подходы к построению решений уравнений n-симплексов, описываем некоторые типы решений, вводим операцию, которая, при некоторых условиях, позволяет построить решение $(n+m+k)$-SE из решений $(n+k)$-SE и $(m+k)$-SE. Мы рассматриваем тропикализацию рациональных решений и обсуждаем способы её обобщения. Мы доказываем, что если G — расширение группы H группой K, то мы можем найти решение n-SE на G по решениям этого уравнения на H и K. Также, мы находим решения параметрического уравнения Янга-Бакстера на H с параметрами из K. Для изучения уравнения 3-симплекса нами введены алгебраические системы с тернарными операциями и приведены примеры этих систем, дающие решения 3-SE. Мы находим все элементарные вербальные решения 3-SE на свободной группе.

Ключевые слова и фразы

уравнение Янга-Бакстера, уравнение тетраэдра, уравнение n-симплекса, теоретико-множественное решение, группоид, 2-группоид, тернар, терноид, расширение групп, группа виртуальных кос.

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1437)

Для цитирования

Бардаков В.Г.. Чужинов Б.Б., Емельяненков И.А.. Иванов М.Э., Козловская Т.А., Лешков В.Э., Теоретико-множественные решения уравнений n-симплексов // Математические труды. 2024. Т. 27, № 1, С. 5-72. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-5-72

SET THEORETICAL SOLUTIONS OF EQUATIONS OF n – SIMPLEXES

Valeriy G. Bardakov[1], Bogdan B. Chuzinov[2], Ivan A. Emel'yanenkov[3], Maxim E. Ivanov[4], Tatyana A. Kozlovskaya[5], Vadim E. Leshkov[6]

[1] bardakov@math.nsc.ru, [2] b.chuzhinov@g.nsu.ru, [3] i.emelianenkov@g.nsu.ru, [4] m.ivanov2@g.nsu.ru, [5] t.kozlovskaya@math.tsu.ru,[6] v.leshkov@g.nsu.ru)

[2,3,4,6] Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia,

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 5-72
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-72

[1,2] Regional Scientific and Educational Mathematical Center of Tomsk State University, 634050 Tomsk, Russia,
[1,5] Sobolev Institute of Mathematics, 630090 Novosibirsk, Russia
[1] Novosibirsk State Agrarian University, 630039 Novosibirsk, Russia.

Abstract

The n-simplex equation (n-SE) was introduced by A. B. Zamolodchikov as a generalization of the Yang-Baxter equation, which is, in these terms, a 2-simplex equation. In this article we propose some general approaches to constructing solutions to equations of n-simplices, describe some types of solutions, and introduce an operation that, under certain conditions, allows us to construct a solution $(n+m+k)$-SE from solutions $(n+k)$-SE and $(m+k)$-SE. We consider tropicalization of rational decisions and discuss ways to generalize it. We prove that if G is an extension of H by K, then we can find a solution of n-SE on G from the solutions of this equation on H and K. Also, we find solutions to the parametric Yang-Baxter equation on H with parameters from K. To study the 3-simplex equation, we introduced algebraic systems with ternary operations and gave examples of these systems that give 3-SE solutions. We find all elementary verbal solutions of 3-SE on a free group.

Keywords

Yang-Baxter equation, tetrahedral equation, n-simplex equation, set-theoretic solution, groupoid, 2-groupoid, ternary, ternoid, group extension, virtual braid group.

Funding

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2024-1437))

For citation

Bardakov V.G., Chuzinov B.B., Emel'yanenkov I.A., Ivanov M.E., Kozlovskaya T.A., Leshkov V.E. Set theoretical solutions of equations of n-simplexes // Siberian advances in mathematics. 2024. vol. 27, no. 1, pp. 5-72. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-5-72

§ 1. Введение и постановка задачи

Решением квантового уравнения Янга-Бакстера (YBE) называют линейное отображение $R : V \otimes V \to V \otimes V$ удовлетворяющее равенству

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \tag{1.0.1}$$

где V — векторное пространство и каждая функция $R_{ij} : V \otimes V \otimes V \to V \otimes V \otimes V$ действует как R на i-ой и j-ой компонентах тензорного произведения и тождественно на оставшейся компоненте. В. М. Бухштабер [1] называл отображенеин R, удовлетворяющее YBE, отображением Янга-Бакстера.

Уравнение Янга-Бакстера, также называемое уравнением треугольника или уравнением 2-симплекса, — одно из основных уравнений математической физики и маломерной топологии. Оно лежит в основаниях теории квантовых групп, теории разрешимых моделей статистической физики, теории узлов и теории групп кос. Впервые, YBE появилось в работе Ч. Янга [2] о задачах многих тел. Позже Р. Д. Бакстер [3] ввёл это уравнение для изучения разрешимых вершинных моделей статистической механики, как условие коммутирования матриц перехода. Другое появление YBE происходит при разложении S-матриц в 1+1-мерной квантовой теории поля (см. работы А. Б. Замолодчикова [4, 5]). Также YBE играет основную роль в квантовом методе обратного рассеяния для интегрируемых систем [6, 7].

Уравнение Янга-Бакстера эквивалентно системе из n^6 кубических алгебраических уравнений от n^4 неизвестных, где $n = \dim V$. То есть даже в двумерном случае получается 64 уравнения от 16 неизвестных. В [8] (см. также [9]) полное описание решений YBE для $n = 2$.

В. Г. Дринфилд [10] предложил исследовать теоретико-множественные решения, т.е. решения, для которых V порождается множеством X, и R — линейный оператор индуцированный преобразованием $R : X \times X \to X \times X$. Мы будем называть такие пары (X, R) теоретико-множественными решениями уравнения Янга-Бакстера или просто решениями YBE. Теоретико-множественные решения имеют связь с группами I-типа, группами Бибербаха, биективными 1-коциклами, теорией Гарсаида и т. д. Инволютивные теоретико-множественные решения YBE изучались в [11].

Легко видеть, что для любого X отображение $P(x, y) = (y, x)$ является решением YBE. С другой стороны, если R — решение YBE, то отображение $S = PR$ удовлетворяет косовскому соотношению

$$(S \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times S)(S \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times S)(S \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times S).$$

Косовское соотношение - это соотношение в группе кос B_n. Топологически, косовское соотношение - это третье движение Рейдемейстера планарных диаграмм зацеплений. В 1980-ых, Д. Джойс [12] и С. В. Матвеев [13] ввели квандлы как инварианты узлов и зацеплений и доказали, что любой квандл даёт элементарное теоретико-множественное решение косовского уравнения. Теоретико-множественным решениям уравнения Янга-Бакстера и косовского уравнения посвящено множество статей, например [1, 14, 15].

В [16] были построенны решения параметрического YBE. В [17] был предложен метод построения линейных параметрических решений YBE из нелинейных преобразований Дарбу некоторых операторов Лакса.

В 2006г. В. Рамп ввёл [18, 19] брейсы для изучения инволютивных теоретико-множественных решений уравнения Янга-Бакстера, до этого те же самые алгебраические объекты рассматривались А. Г. Курошем [20] в 1970-ых. В 2014г. это понятие было переформулированно Ф. Чедо, Э. Йесперсом и Я. Окнинским в [21]. В 2017г. Л. Гуарниери и Л. Вендрамин определили [22] косые левые брейсы дающие, неинволютивные решения уравнения Янга-Бакстера.

Решение уравнения Янга-Бакстера $R(x,y) = (\sigma_y(x), \tau_x(y))$ называют неварожденным, если σ_x и τ_x обратимы для всех $x \in X$. Оно называется свободным от квадратов если $R(x,x) = (x,x)$ для всех $x \in X$. Решение $R(x,y) = (\sigma_y(x), \tau_x(y))$ определяет 2-группоид $(X; \cdot, *)$ — множество с двумя бинарными алгебраическими операциями $\cdot, * : X \times X \to X$, так что $x \cdot y = \sigma_y(x)$ и $y * x = \tau_x(y)$. Если $\sigma_y = \mathrm{id}$ при всех $y \in X$ или $\tau_x = \mathrm{id}$ при всех $x \in X$, то решение (X, R) называют элементарным. Любое элементарное решение определяет самодистрибутивный группоид X. Если элементарное решение невырожденно, то соответствующий группоид — рэк. С другой стороны, любой самодистрибутивный группоид даёт решение YBE и любой рэк даёт невырожденное решение YBE. Любой квандл определяет невырожденное, свободное от квадратов решение YBE.

Уравнение 3-симплекса или уравнение тетраэдра (TE) было введено А. Б. Замолодчиковым [4, 5] как трёхмерное обобщение YBE. Уравнение тетраэдра - это нелинейное соотношение в $V^{\otimes 6}$ на эндоморфизм $R : V^{\otimes 3} \to V^{\otimes 3}$:

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123},$$

где индексы у оператора R_{ijk} обозначают экземпляры V в тензорном произведении на которых оператор действует как R, на остальных экземплярах он действует тождественно. Уравнение тетраэдра широко известно в теории элетрических сетей. В частности, знаменитое преобразование ‘звезда-треугольник’ даёт рациональное решение уравнения тетраэдра. Также, TE используется в теории двумерных узлов в четырёхмерной сфере [23]. Оно является некоторым аналогом третьего движения Рейдемейстера в классической теории узлов. Уравнение тетраэдра возникает в задаче о раскраске 2-граней в 4-кубе элементами некоторого множества X (см. [24]).

Уже известно множество решений уравнения тетраэдра. Например, Я. Хиетаринта [25] рассмотрел множество $\mathbb{Z}_d$ целых чисел по модулю d в качестве X и изучил линейные и аффинные отображения $X^n \to X^n$ дающие решения уравнения n-симплекса для $n = 2, 3, 4$. В [26] описаны линейные решения TE.

Уравнение n-симплекса - это обобщение YBE и TE. Оно было введено в [27] и изучалось в [28], [29], [25], [30], [31], [32]. В данной статье мы предлагаем некоторые общие подходы к построению решений уравнений n-симплексов, описываем некоторые типы решений, вводим операцию, которая, при некоторых условиях, позволяет построить решение $(n+m+k)$-SE из решений $(n+k)$-SE и $(m+k)$-SE. Мы рассматриваем тропикализацию рациональных решений и обсуждаем способы её обобщения. Мы доказываем, что если G — расширение группы H группой K, то мы можем найти решение n-SE на G по решениям этого уравнения на H и K. Также, мы находим решения параметрического уравнения Янга-Бакстера на H с параметрами из K. Для изучения уравнения 3-симплекса мы вводим алгебраические системы с тернарными операциями и приводим примеры этих систем, дающие решения 3-SE. Мы находим элементарные вербальные решения 3-SE на свободной группе.

Эта статья устроенна следующим образом. В разделе , мы напоминаем связь между теоретико-множественными решениями уравнения Янга-Бакстера и некоторыми алгебраическими системами (самодистрибутивными группоидами, рэками, квандлами). Мы формулируем условия при которых алгебраическая система с двумя бинарными операциями даёт теоретико-множественное решение YBE. Мы напоминаем определения и некоторые свойства групп кос и виртуальных групп кос.

В разделе мы представляем общий вид уравнения n-симплекса, описываем алгоритм, позволяющий записать уравнение n-симплекса для произвольного $n \geq 2$ и формулируем результаты об общих решениях. Мы также даём определение классического n-SE аналогичное классическому YBE.

Известно, что если (X, R) — решение YBE и $P_{12}(x, y) = (y, x)$, то $P_{12}RP_{12}$ тоже является решением YBE. В Предложении 4.11 мы доказываем аналогичный факт для произвольного уравнения n-симплекса: мы строим перестановку P, такую, что PRP удовлетворяет уравнению n-SE.

Для положительного целого k мы определяем k-амальгаму решений $(n + k)$-SE и $(m + k)$-SE и находим достаточные условия (Теорема 4.14)) для того, чтобы k-амальгама была решением $(n + m + k)$-SE. Далее мы применяем эту теорему к линейным решениям.

В Предложении 4.23 мы показываем, что 0-амальгама линейных решений n-SE и m-SE дает решение $(n + m)$-SE. Если для них определена 1-амальгама, то она является решением $(n + m - 1)$-SE. Также мы показываем, что если у решения n-SE есть неподвижная точка, то специализация решения в этой точке дает решение $(n - 1)$-SE.

В разделе 4.26 мы рассматриваем некоторый класс рациональных решений n-SE и определяем их тропикализацию. Мы показываем, что тропикализация решений из этого класса приводит нас к кусочно-линейным решениям n-SE. В частности, мы получаем линейное решение TE из электрического решения. Далее мы обобщаем процедуру тропикализации на другие алгебраические системы. Как пример этого обобщения, мы строим гомоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathcal{D}'[\mathbb{R}^m]$ из поля $\mathbb{R}$ в линейное пространство $\mathcal{D}'[\mathbb{R}^m]$ обобщенных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^m$ с операциями сложения и свертки. Этот гомоморфизм позволяет построить решения $(\mathcal{D}'[\mathbb{R}^m], R^h)$ уравнения n-симплекса из рациональных решений этого уравнения над $\mathbb{R}$.

В разделе 4.26 мы рассматриваем расширения групп. Мы показываем, что если G — группа, H — её нормальная подгруппа и на G можно определить структуру самодистрибутивного группоида, то, при некоторых условиях на G/H, можно определить решение YBE на H с параметрами в G/H. В частности, это можно сделать когда K — тривиальный самодистрибутивный группоид. Мы обобщаем эти результаты на произвольное n-SE. В подразделе 4.26, используя уже известные представления группы виртуальных кос, мы строит два типа решений уравнения Янга-Бакстера с параметрами в абелевой группе (6.50). Далее мы показываем, что для произвольного расширения G группы H с помощью группы K, и решений (H, R) и (K, T) уравнения n-симплекса, можно естественным образом определить решение уравнения n-симплекса на G.

В разделе 4.26 мы рассматриваем категорию решений n-SE и доказываем, что предел решений в этой категории тоже является решением. В частности (Следствие 8.56) пара решений $(\mathbb{Z}_{p^k}, R_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, уравнения n-симплекса, при некоторых условиях дает решение n-SE на p-адических числах.

В разделе 4.26 по аналогии с рэками, би-рэками, косыми брейсами, введёнными для изучения уравнения Янга-Бакстера, мы вводим тернары и 3-терноиды — алгебраические системы с одной и тремя тернарными операциями, соответсвенно. Мы показываем как они связанны с решениями уравнения тетраэдра (см. Предложение 9.58 и следствия). Также мы вводим алгебраические системы с четыремя бинарными операциями и показываем в Предложениях 9.63 и 9.67 их связь с элементарными решениями уравнения тетраэдра.

В разделе 4.26 мы определяем вербальные решения. Мы описываем все элементарные вербальные решения TE, определённые на свободных неабелевых группах.

В статье сформулированны некоторые открытые вопросы для дальнейшего изучения.

Везде в статье используются стандартные обозначения. Если G — группа и $a, b \in G$, тогда мы обозначаем через $a^b = b^{-1}ab$ сопряжение a с помощью b и через $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ коммутатор a и b. Также, мы предполагаем, что композиция действует справа налево, т.е. если $f, g : X \to X$, то их композиция fg действует по правилу $(fg)(x) = f(g(x))$.

§ 2. Предварительные сведения

В этом разделе мы напомним основные необходимые факты об уравнении Янга-Бакстера. Опишем связь его решений с группами классических и виртуальных кос, а также с некоторыми группоидами (рэками, квандлами), приведем примеры таких решений.

2.1. Уравнение Янга-Бакстера и рэки.

Лемма 2.1. *Пусть X — непустое множество и заданы отображения $f, g : X^2 \to X$. Отображение $R : X^2 \to X^2$, $R(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ является решением YBE тогда и только тогда, когда для любых $x, y, z \in X$ выполняются следующие тождества*

$$\begin{aligned} f(f(x,y),z) &= f(f(x,g(y,z)),f(y,z)), \\ f(g(x,y),g(f(x,y),z)) &= g(f(x,g(y,z)),f(y,z)), \\ g(g(x,y),g(f(x,y),z)) &= g(x,g(y,z)). \end{aligned}$$

Пример 2.2.

1. Пусть A — абелева группа и $a, b \in A$, тогда

$$R(x, y) = (x + a, y + b), \quad x, y \in A,$$

   решение YBE на A.

2. Для любой группы G отображение

$$R(x, y) = (xy^2, xy^{-1}x^{-1}), \quad x, y \in G,$$

   решение YBE на G.

3. Пусть G — группа, а $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ её автоморфизм, тогда отображение $R(x, y)$

$$R(x, y) = (\varphi(x), xy\varphi(x)^{-1}), \quad x, y \in G,$$

   решение YBE на G.

Группоидом называется непустое множество с одной бинарной операцией. Для положительного целого $k > 1$ определим k-группоид как непустое множество с k бинарными операциями. Пусть (X, R) теоретико-множественное решение YBE и $R(x, y) = (\sigma_y(x), \tau_x(y))$, где $x, y \in X$. Мы будем называть решение R *невырожденным* если σ_x и τ_x обратимы для всех $x \in X$. Мы будем называть решение R *свободным от квадратов* если $R(x, x) = (x, x)$ для всех $x \in X$.

Квандлом называется группоид Q с бинарной операцией $(x, y) \mapsto x * y$ удовлетворяющей следующим аксиомам

(Q1) $x * x = x$ для всех $x \in Q$,

(Q2) Для любых $x, y \in Q$ существует единственный $z \in Q$ такой, что $x = z * y$,

(Q3) $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ для всех $x, y, z \in Q$.

Группоид называется *самодистрибутивным*, если он удовлетворяет аксиоме (Q3).
Рэком называется группоид удовлетворяющий аксиомам (Q2) и (Q3).

Пример 2.3.

1. Пусть G — группа, тогда бинарная операция $a * b = b^{-1}ab$ на носителе G образует квандл $\mathrm{Conj}(G)$ называющийся *квандлом сопряжения* группы G.

2. Группа G с бинарной операцией $a*b = ba^{-1}b$ образует квандл $\mathrm{Core}(G)$, называющийся *основным квандлом* группы G. В случае $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, этот квандл называется *диэдральным* и обозначается R_n.

3. Пусть G — группа и $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Тогда G с бинарной операцией $a * b = \phi(ab^{-1})b$ образует *обобщенный квандл Александера* $\mathrm{Alex}(G, \phi)$ группы G относительно ϕ.

Квандл Q называется *тривиальным* если $x * y = x$ для всех $x, y \in Q$. В отличие от групп, тривиальный квандл может иметь произвольное число элементов. Будем обозначать тривиальный квандл на n элементах T_n, а произвольный тривиальный квандл будем обозначать T.

Заметим, что аксиомы (Q2), (Q3) эквивалентны тому, что отображение $S_x : Q \to Q$, определенное формулой

$$S_x(y) = y * x$$

является автоморфизмом Q для всех $x \in Q$. Автоморфизмы такого вида называются внутренними и образуют группу $\mathrm{Inn}(X)$. Квандл называется связным, если группа его внутренних автоморфизмов действует на нем транзитивно. Например, диэдральные квандлы R_n связны, если n — нечетное, и несвязны если n — четное число. Квандл X называется *инволютивным* если $S_x^2 = \mathrm{id}_Q$ для всех $x \in Q$. Например, все основные квандлы инволютивны.

Для решения (X, R), $R(x, y) = (\sigma_y(x), \tau_x(y))$, можно определить 2-группоид $(X, \cdot, *)$ с операциями $x \cdot y = \sigma_y(x)$ и $y * x = \tau_x(y)$. Если $\sigma_y = \mathrm{id}$ для всех $y \in X$ или $\tau_x = \mathrm{id}$ для всех $x \in X$, тогда решение (X, R) называется *элементарным.* Всякое элементарное решение определяет структуру самодистрибутивного группоида на X. Если элементарное решение невырожденно, то определенный таким образом группоид является рэком. С другой стороны, любой самодистрибутивный группоид определяет элементарное решение YBE, а любой рэк определяет невырожденное решение YBE. Аналогично, квандл определяет невырожденное решение YBE, свободное от квадратов.

Из Леммы 2.1 можно вывести следующую лемму, которая устанавливает связь между решениями и 2-группоидами.

Лемма 2.4. *Пусть $(X, \cdot, *)$ — 2-группоид и $R : X \times X \to X \times X$ определенно как*

$$R(x, y) = (x \cdot y, y * x) \text{ где } x, y \in X.$$

Тогда

1. *Пара (X, R) является теоретико-множественным решением YBE если и только если уравнения*

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= (x \cdot (z * y)) \cdot (y \cdot z), \\ (y * x) \cdot (z * (x \cdot y)) &= (y \cdot z) * (x \cdot (z * y)), \\ (z * (x \cdot y)) * (y * x) &= (z * y) * x, \end{aligned}$$

   выполнены для всех $x, y, z \in X$.

2. *Если $x \cdot y = y$ для всех $x, y \in X$, тогда (X, R) — теоретико - множественное решение YBE если и только если операция $*$ самодистрибутивна, т.е.*

$$(z * x) * (y * x) = (z * y) * x$$

   для всех $x, y, z \in X$.

3. *Если $y * x = y$ для всех $x, y \in X$, тогда (X, R) — теоретико - множественное решение YBE если и только если операция $\cdot$ самодистрибутивна, т.е.*
$$(z \cdot y) \cdot x = (z \cdot x) \cdot (y \cdot x)$$
для всех $x, y, z \in X$.

Пример 2.5. Определим на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ бинарную операцию
$$a * b = \max\{a, b\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$
Тогда $(\mathbb{R}, *)$ образует самодистрибутивный группоид. Он не является рэком, но является коммутативным группоидом, а любой элемент $a \in \mathbb{R}$ является идемпотентом, т.е. $a * a = a$. Отображение $R(x, y) = (x, y * x)$ дает вырожденное решение YBE на $\mathbb{R}$. Если вместо max в примере взять min мы получим аналогичный результат.

А. Соловьев [33, Theorem 2.3] (см. также L. Guarnieri, L. Vendramin [22, Proposition 3.7] и D. Bachiller [34, Proposition 5.2]) показал, что любое невырожденное решение YBE сопряжено элементарному решению.

Предложение 2.6. *Если $R(x, y) = (\sigma_y(x), \tau_x(y))$, $x, y \in X$, является невырожденным слева (т.е. σ_y биекция для всех $y \in X$) решением YBE, тогда оно сопряжено элементарному решению:*
$$R'(x, y) = (\sigma_x(\tau_{\sigma_y^{-1}(x)}(y)), y).$$
Если для всех $a, b \in X$ существует $x \in X$ такой, что
$$\tau_{\sigma_x^{-1}(a)}(x) = \sigma_a^{-1}(b), \tag{2.1.2}$$
тогда это решение невырождено.

2.2. Группа кос и группа виртуальных кос.

Для $n \geq 2$ группа кос B_n на n нитях задаётся порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ $\ldots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{2.2.3}$$
$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \qquad |i - j| \geq 2. \tag{2.2.4}$$

Группа виртуальных кос VB_n на n нитях, была введенная в [35]. Эта группа заданна порождающими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ и определяющими соотношениями группы кос (2.2.3)–(2.2.4), а также дополнительными соотношениями

$$\rho_i\rho_{i+1}\rho_i = \rho_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{2.2.5}$$
$$\rho_i\rho_j = \rho_j\rho_i, \qquad |i-j| \geq 2, \tag{2.2.6}$$
$$\rho_i^2 = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.2.7}$$
$$\sigma_i\rho_j = \rho_j\sigma_i, \qquad |i-j| \geq 1, \tag{2.2.8}$$
$$\rho_i\rho_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\rho_i\rho_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{2.2.9}$$

Элементы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ порождают подгруппу, изоморфную B_n. Соотношения
(2.2.5)–(2.2.7) — это определяющие соотношения симметрической группы S_n. Элементы $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}$ порождают S_n. Таким образом VB_n порождена группой кос B_n и симметрической группой S_n. Соотношения (2.2.8)–(2.2.9) называются смешанными соотношениями группы виртуальных кос.

§ 3. Квантовое и классическое уравнения n-симплекса

3.1. Квантовое уравнение n-симплекса. Для того, чтобы записать квантовое уравнение n-симплекса для произвольного n, мы напомним геометрическую интерперетацию уравнения Янга-Бакстера. Рассмотрим тройку прямых l_1, l_2, l_3 на плоскости $\mathbb{R}^2$. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке R_{12} и прямую l_3 в R_{13}, а прямая l_2 пересекает l_3 в R_{23}. Предположим, что все точки R_{12}, R_{13}, and R_{23} различны и являются вершинами невырожденного треугольника (2-симплекса) (см. Рис. 1).

Введем лексикографическией порядок на вершинах

$$R_{12} < R_{13} < R_{23}.$$

Тогда YBE — это равенство между словами, где первое получается обходом вершин в симплексе по возрастанию, а второе получается обходом в обратном порядке.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Чтобы получить уравнение тетраэдра (3-SE), увеличим индексы прямых на плоскости из YBE на 3 и вложим эту плоскость в трехмерное пространство. Выберем вершину, лежащую вне этой плоскости и соединим её прямыми l_1, l_2 и l_3 с вершинами 2-симплекса. Присвоим вершинами индексы, соответствующие прямым, которым вершины принадлежат (см. Рис. 2).

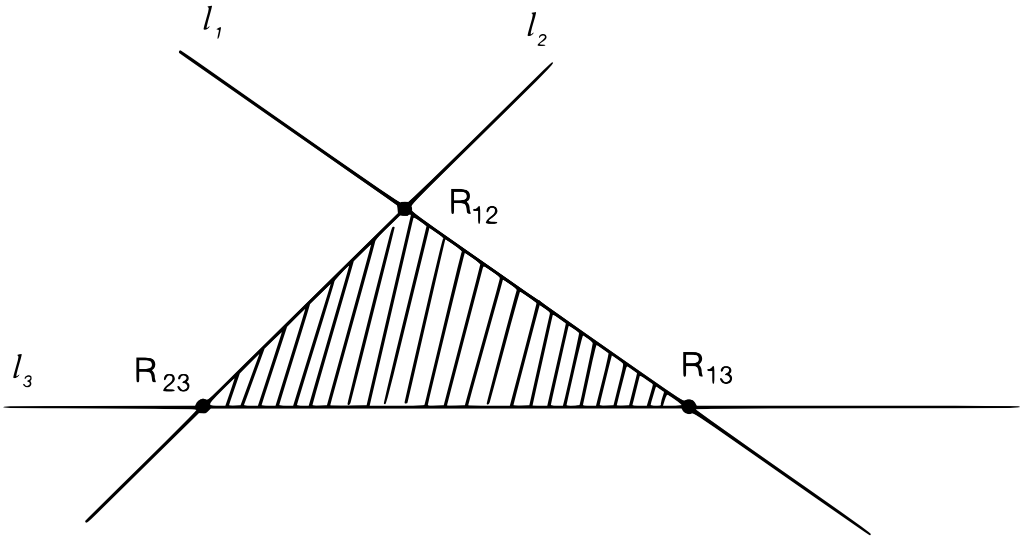

Рис. 1: Неометрическая интерпретация YBE

Уравнение тетраэдра — это равенство слов, где первое состоит из вершин, записанных в лексикографическом порядке, а второе — в обратном лексикографическом порядке, т.е.

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123}.$$

Используя этот подход можно записать уравнение 4-симплекса,

$$R_{1234}R_{1567}R_{2589}R_{368,10}R_{479,10} = R_{479,10}R_{368,10}R_{2589}R_{1567}R_{1234}.$$

В общем случае, левая и правая части n-SE состоят из слов длины $n+1$ (число вершин в n-симплексе).

Предположим, что нам дано n-SE для некторого $n \geq 3$. Мы будем записывать это уравнение в форме

$$R_{\overline{1}}R_{\overline{2}}\cdots R_{\overline{n+1}} = R_{\overline{n+1}}\cdots R_{\overline{2}}R_{\overline{1}},$$

где $\overline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ — это мультииндекс. Для построения $(n+1)$-SE определим операцию $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s_n(k) = k+n+1$ и продолжим её на мультииндексы по правилу

$$s_n(\overline{k}) = (s_n(k_1), s_n(k_2), \ldots, s_n(k_{n+1})) \in \mathbb{N}^{n+1}.$$

В этих обозначениях, уравнение $(n+1)$-SE можно записать, как

$$R_{1,2,\ldots,n+1}R_{1,s_n(\overline{1})}R_{2,s_n(\overline{2})}\cdots R_{n+1,s_n(\overline{n+1})} =$$

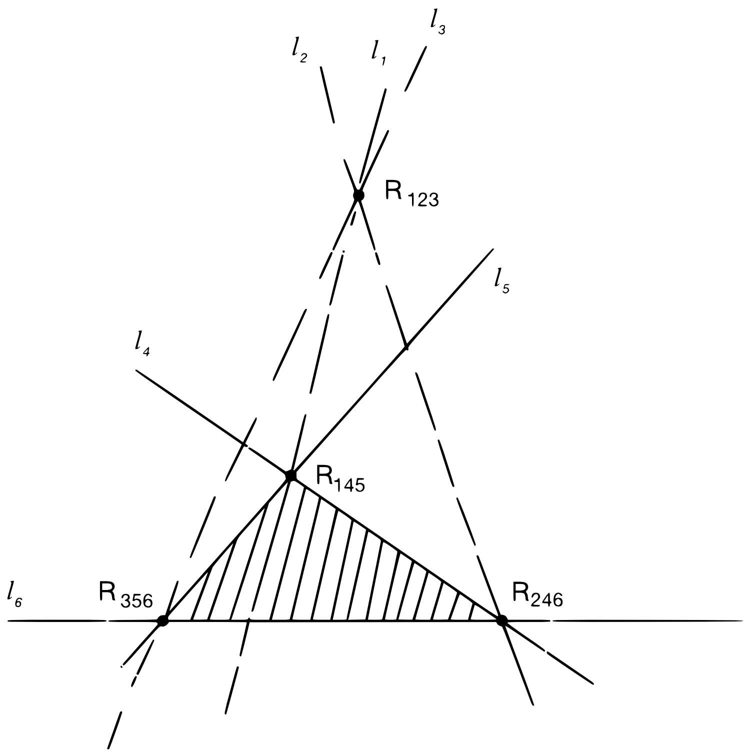

Рис. 2: геометрическая интерпретация TE

$$= R_{n+1,s_n(\overline{n+1})} \cdots R_{2,s_n(\overline{2})} R_{1,s_n(\overline{1})} R_{1,2,\dots,n+1}.$$

Мультииндексы в n-SE можно воспринимать как столбцы в *матрице мультииндексов* MI_n размера $(n+1)\times n$, которая удовлетворяет следующему рекурентному соотношению.

$$MI_n = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ \vdots & & MI_{n-1}+(n) & & \\ n-1 & & & & \\ n & & & & \end{array}\right)$$

где (n) — это матрица размера $n \times n-1$, все элементы которой равны n.

Матрицу MI_n можно выписать явно

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \\ 2 & n+1 & 2n & \cdots & 3n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 2n-2 & 3n-4 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 2n-1 & 3n-3 & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}.$$

Линейное решение n-SE — это линейное отображение $R : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ такое, что выполняется равенство

$$R_{\overline{1}} R_{\overline{2}} \cdots R_{\overline{n+1}} = R_{\overline{n+1}} \cdots R_{\overline{2}} R_{\overline{1}},$$

двух линейных отображений $V^{\otimes N} \to V^{\otimes N}$, где $N = n(n+1)/2$. В данном уравнении $R_{\overline{k}} : V^{\otimes N} \to V^{\otimes N}$ действует, как R на копиях V с индексами из $\overline{k}$, и тождественно на остальных компонентах. Здесь $n+1$ совпадает с числом вершин в n-симплексе, а N с числом его ребер.

Теоретико-множественное решение n-SE на множестве X — это отображение $R : X^n \to X^n$ удовлетворяющее n-SE.

Для удобства определим уравнение 1-симплекса

$$R_1 R_2 = R_2 R_1,$$

как равенство пары отображений $X \times X \to X \times X$. В таком случае R — это отображение $R : X \to X$.

Любое отображние $R : X \to X$ является решением уравнения 1 - симплекса, т.к.

$$R_1(x, y) = (R(x), y), \quad R_2(x, y) = (x, R(y)),$$
$$R_1 R_2(x, y) = R_2 R_1(x, y) = (R(x), R(y)).$$

3.2. Классическое уравнение n-симплекса.

Уравнение

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

называется квантовым уравнением Янга-Бакстера. Наряду с квантовым уравнением Янга-Бакстера также рассматривают классическое уравнение Янга-Бакстера(см. [36]):

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0,$$

где $[a, b] = ab - ba$.

Если (V, R) линейное решение, и R можно записать в виде

$$R = 1 + \hbar r + O(\hbar^2),$$

тогда $r\colon V \to V$ дает решение классического уравнения Янга-Бакстера.

Определим классическое уравнение n-симплекса как

$$\sum_{\overline{1} \le \overline{i} < \overline{j} \le \overline{n+1}} [r_{\overline{i}}, r_{\overline{j}}] = 0, \tag{3.2.10}$$

где сумма берётся относительно лексикографического порядка на мультииндексах. Это определение обусловленно следующим предложением, проверяемым прямыми вычислениями.

Предложение 3.7. *Если V — векторное пространство, $R\colon V^n \to V^n$ — линейное отображение, дающее решение n-SE, и существует отображение $r\colon V^n \to V^n$ такое, что*

$$R = 1 + \hbar r + O(\hbar^2),$$

то r удовлетворяет уравнению 3.2.10.

§ 4. Решения произвольного уравнения n-симплекса

В дальнейшем, мы будем рассматривать только теоретико - множественные решения. Мы также будем рассматривать функции $R : X^n \to X^n$ определенные только на некотором подмножестве $D \subset X^n$. В таком случае мы будем называть пару (X, R) решением n-SE, если n-SE выполняется в каждой точке $\bar{x} \in X^N$, для которой левая и правая часть корректно определены.

Следующее предложение является обобщением хорошо известного результата для YBE.

Предложение 4.8. *Пусть $R : X^n \to X^n$ — решение n-SE.*

1. *Если R обратимо, то обратное отображение R^{-1} является решением n-SE.*

2. *Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — попарно коммутирующие отображения из X в X, то $R : X^n \to X^n$ определенное формулой*

$$R(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)),$$

является решением n-SE.

3. *Если $\varphi \in Sym(X)$ — произвольная биекция множества X на себя, тогда композиция*

$$\varphi^{\times n}\, R\, (\varphi^{-1})^{\times n}$$

является решением n-SE.

Доказательство. (1) Обращая отображения в левой и правой части n-SE, получаем, что R^{-1} является решением n-SE.

(2) Легко заметить, что все отображения $R_{\bar{i}}$ полученные из R попарно коммутируют. Тогда отображения в левой части n-SE можно переставить так, чтобы получить правую часть уравнения.

(3) Пусть $\widetilde{R} = \varphi^{\times n}\, R\, (\varphi^{-1})^{\times n}$. Тогда

$$\widetilde{R}_{\bar{k}} = \varphi^{\times n}_{\bar{k}}\, R_{\bar{k}}\, (\varphi^{-1})^{\times n}_{\bar{k}} = \varphi^{\times N}\, R_{\bar{k}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}$$

Уравнение

$$\widetilde{R}_{\bar{1}}\widetilde{R}_{\bar{2}}\cdots\widetilde{R}_{\overline{n+1}} = \widetilde{R}_{\overline{n+1}}\cdots\widetilde{R}_{\bar{2}}\widetilde{R}_{\bar{1}},$$

эквивалентно

$$\begin{aligned}&\left(\varphi^{\times N}\, R_{\bar{1}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right)\,\left(\varphi^{\times N}\, R_{\bar{2}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right)\cdots\left(\varphi^{\times N}\, R_{\overline{n+1}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right) =\\ &= \left(\varphi^{\times N}\, R_{\overline{n+1}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right)\cdots\left(\varphi^{\times N}\, R_{\bar{2}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right)\,\left(\varphi^{\times N}\, R_{\bar{1}}\, (\varphi^{-1})^{\times N}\right).\end{aligned}$$

После сокращений получаем

$$\varphi^{\times N}R_{\bar{1}}R_{\bar{2}}\cdots R_{\overline{n+1}}(\varphi^{-1})^{\times N} = \varphi^{\times N}R_{\overline{n+1}}\cdots R_{\bar{2}}R_{\bar{1}}\,(\varphi^{-1})^{\times N}.$$

Т.к. φ^{N} — биекция, полученное уравнение эквивалентно изначальному. ☐

Следующее предложение обобщает Предложение 2.2 из [37].

Предложение 4.9. *Если R — решение n-SE и $\varphi \in Sym(X)$ — биекция такая, что*

$$(\varphi^{-1})^{\times n}\, R\, \varphi^{\times n} = R$$

тогда отображение

$$\tilde{R} = (\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots)\, R\, (\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots),$$

где $(\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots)$ действует как φ на нечетных компонентах и как id *на четных, $(\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots)$ действует как φ^{-1} на четнах компонентах и как* id *на нечетных, является решением n-SE.*

Доказательство. Заметим, что

$$(\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots) = (\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots)\, \varphi^{\times n},$$

$$(\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots) = (\varphi^{-1})^{\times n}\, (\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots)$$

и

$$\begin{aligned}R_A := \tilde{R} = (\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots)R(\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots) =\\ = (\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots)\left((\varphi^{-1})^{\times n} R \varphi^{\times n}\right)(\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots) =\\ = (\mathrm{id} \times \varphi^{-1} \times \mathrm{id} \times \ldots)R(\varphi \times \mathrm{id} \times \varphi \times \ldots) =: R_B.\end{aligned}$$

Заметим, что каждый индекс в уравнении встречается ровно два раза. Если индекс впервые встречается в мультииндексе $\overline{i}$ на j-м месте, второй раз он встретится в уравнении в мультииндексе $\overline{j+1}$ на i-м месте. Тогда, если заменить каждое отображение $R_{\overline{i}}$, где i четное на $(R_A)_{\overline{i}}$ и каждое отображение $R_{\overline{i}}$ где i нечетное на $(R_B)_{\overline{i}}$, то для любых i и $j \geqslant i$ компонента с индексом i_j остается без изменений между $R_{\overline{i}}$ и $R_{\overline{j+1}}$. Действительно, если i и j четные или нечетные одновременно, то на компоненту i_j между $R_{\overline{i}}$ и $R_{\overline{j+1}}$ действует $\mathrm{id} \circ \mathrm{id}$, а если i и j имеют разную четность, то $\varphi \circ \varphi^{-1}$ или $\varphi^{-1} \circ \varphi$. Так как каждый индекс в уравнении встречается ровно два раза, уравнение

$$(R_B)_{\overline{1}}(R_A)_{\overline{2}} \ldots (\tilde{R})_{\overline{n+1}} = (\tilde{R})_{\overline{n+1}} \ldots (R_A)_{\overline{2}}(R_B)_{\overline{1}}$$

можно переписать в виде

$$\Phi R_{\overline{1}} R_{\overline{2}} ... R_{\overline{n+1}} \Phi = \Phi R_{\overline{n+1}} ... R_{\overline{2}} R_{\overline{1}} \Phi,$$

где Φ – это покомпонентное действие φ, φ^{-1} или id. □

Несложно проверить, что если (X, R), где $R(x, y) = (x, y * x)$ — элементарное решение YBE и $P(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in X$, тогда

$$PRP(x, y) = (x * y, y)$$

элементарное рещение YBE.

Мы приводим доказательство следующей элементарной леммы чтобы позже обобщить её на случай произвольного уравнения n-симплекса.

Лемма 4.10. *Пусть $R(x, y) = (x \cdot y, y * x)$ — решение YBE. Тогда $PRP(x, y) = (x * y, y \cdot x)$ тоже является решением YBE.*

Доказательство. Несложно заметить, что

$$R_{13} = P_{23} R_{12} P_{23}, \quad R_{23} = P_{12} P_{23} R_{12} P_{23} P_{12},$$

где $P_{ij} : X^3 \to X^3$ переставляет i-ю и j-ю компоненты. Тогда YBE принимает вид

$$R_{12} \cdot R_{12}^{P_{23}} \cdot R_{12}^{P_{23}P_{12}} = R_{12}^{P_{23}P_{12}} \cdot R_{12}^{P_{23}} \cdot R_{12}.$$

Обозначим $\widetilde{R} = PRP$. Тогда $R = P\widetilde{R}P$ и из YBE

$$\widetilde{R}_{12}^{P_{12}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{12}P_{23}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{12}P_{23}P_{12}} = \widetilde{R}_{12}^{P_{12}P_{23}P_{12}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{12}P_{23}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{12}}.$$

Сопрягая обе части уравнения с помощью $P_{12}P_{23}P_{12} = P_{13}$, мы получаем

$$\widetilde{R}_{12}^{P_{23}P_{12}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{23}} \cdot \widetilde{R}_{12} = \widetilde{R}_{12} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{23}} \cdot \widetilde{R}_{12}^{P_{23}P_{12}}.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению

$$\widetilde{R}_{12}\widetilde{R}_{12}\widetilde{R}_{12} = \widetilde{R}_{12}\widetilde{R}_{12}\widetilde{R}_{12}.$$

Значит $\widetilde{R} = PRP$ является решением YBE.

$\square$

Чтобы обобщить эту лемму, рассмотрим решение (X, R) n-SE и определим перестановку $P \in Sym(X^n)$ формулой

$$P = P_{1,n}P_{2,n-1}\dots P_{[n/2]+1,n-[n/2]},$$

где $[n/2]$ — это целая часть $n/2$ и для $n = 2m+1$, мы предполагаем, что последняя перестановка $P_{[n/2]+1,n-[n/2]} = P_{m+1,m+1}$ тождественна. Заметим, что $P^{-1} = P$.

Предложение 4.11. *Пусть $R : X^n \to X^n$ —решение n-SE. Тогда $\widetilde{R} = PRP$ также решение n-SE.*

Доказательство. Уравнение n-симплекса

$$R_{\overline{1}}R_{\overline{2}}\cdots R_{\overline{n+1}} = R_{\overline{n+1}}\cdots R_{\overline{2}}R_{\overline{1}}$$

можно переписать в виде

$$R_{\overline{1}}R_{\overline{1}}^{Q_1}\cdots R_{\overline{1}}^{Q_n} = R_{\overline{1}}^{Q_n}\cdots R_{\overline{1}}^{Q_1}R_{\overline{1}},$$

где $Q_1, \dots, Q_n \in Sym(X^n)$ некоторые перестановки. Так как $R = P\widetilde{R}P$, то

$$\widetilde{R}_{\overline{1}}^{P}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_1}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_n} = \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_n}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_1}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{P}.$$

После сопряжения обеих частей с помощью $Q_n^{-1}P$ мы получаем

$$\widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_n^{-1}P}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_1Q_n^{-1}P}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_{n-1}Q_n^{-1}P}\widetilde{R}_{\overline{1}} = \widetilde{R}_{\overline{1}}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_{n-1}Q_n^{-1}P}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_1Q_n^{-1}P}\ \widetilde{R}_{\overline{1}}^{PQ_n^{-1}P}.$$

Применяя равенства

$$PQ_n^{-1}P = Q_n, \quad PQ_1Q_n^{-1}P = Q_{n-1}, \dots, PQ_{n-1}Q_n^{-1}P = Q_1,$$

получаем

$$\widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_n}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_{n-1}}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_1}\widetilde{R}_{\overline{1}} = \widetilde{R}_{\overline{1}}\widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_1}\cdots \widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_{n-1}}\ \widetilde{R}_{\overline{1}}^{Q_n}.$$

Следовательно, $\widetilde{R}$ является решением n-SE. $\square$

Вопрос 4.12. Известно, что если R решение YBE, то $S = PR$ удовлетворяет косовскому соотношению $S_{12}S_{23}S_{12} = S_{23}S_{12}S_{23}$. Что является аналогом этого соотношения для уравнения n-симплекса?

4.1. Композиция решений. На линейных решениях YBE определены две операции (см., например, [38]): тензорное произведение и прямая сумма. Если $(V_1, R^{(1)})$ и $(V_2, R^{(2)})$ решения YBE, то их тензорное произведение $(V_1 \otimes V_2, R^{(1)} \otimes R^{(2)})$ и прямая сумма $(V_1 \times V_2, R^{(1)} + R^{(2)})$ дают решение YBE. Отображение $R^{(1)} + R^{(2)}$ определено на $(V_1 \times V_2) \otimes (V_1 \times V_2)$ правилами

$$\begin{array}{rcl} (R^{(1)} + R^{(2)})(e_i \otimes e_j) & = & R^{(1)}(e_i \otimes e_j), \\ (R^{(1)} + R^{(2)})(e_i \otimes f_q) & = & e_i \otimes f_q, \\ (R^{(1)} + R^{(2)})(f_p \otimes e_j) & = & f_p \otimes e_j, \\ (R^{(1)} + R^{(2)})(f_p \otimes f_q) & = & R^{(2)}(f_p \otimes f_q), \end{array}$$

где $\{e_\alpha\}$ — базисные векторы V_1 и $\{f_\beta\}$ — базисные векторы V_2.

В этом подразделе мы рассмотрим следующий вопрос: пусть (X, A) и (Y, B) теоретико-множественные решения n-SE и m-SE, соответственно. Какие новые решения можно построить?

Если $m = n$, то легко определить прямое произведение решений,

$$A \times B : (X \times Y)^n \to (X \times Y)^n,$$

$$A \times B\,((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)) = ((f_1(\bar{x}), g_1(\bar{y})), (f_2(\bar{x}), g_2(\bar{y})), \dots$$
$$\dots, (f_n(\bar{x}), g_n(\bar{y}))),$$

где

$$A(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})), \quad B(\bar{y}) = (g_1(\bar{y}), g_2(\bar{y}), \dots, g_n(\bar{y})),$$

и

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Отображение $A \times B$ является решением n-SE.

Определение 4.13. Пусть $A\colon X^{n+k} \to X^{n+k}$ и $B\colon X^{k+m} \to X^{k+m}$ — два отображения, имеющие вид

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = (f_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, f_n(\bar{x}, \bar{y}), h_1(\bar{y}), \dots, h_k(\bar{y}))\,, \quad \bar{x} \in X^n, \quad \bar{y} \in X^k,$$

$$B(\bar{y}, \bar{z}) = (h_1(\bar{y}), \dots, h_k(\bar{y}), g_1(\bar{y}, \bar{z}), \dots, g_m(\bar{y}, \bar{z}))\,, \quad \bar{z} \in X^m,$$

тогда отображение $A\,\#_k B\colon X^{n+k+m} \to X^{n+k+m}$, определенное формулой

$$A\,\#_k B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) := (f_1(\bar{x}, \bar{y}), \dots, f_n(\bar{x}, \bar{y}), h_1(\bar{y}), \dots, h_k(\bar{y}), g_1(\bar{y}, \bar{z}), \dots, g_m(\bar{y}, \bar{z}))$$

называется *k-амальгамой* A и B.

Теорема 4.14. *Пусть $n > 0$, $m > 0$, $k \geq 0$ — целые числа, $A\colon X^{n+k} \to X^{n+k}$ и $B\colon X^{k+m} \to X^{k+m}$ — решения $(n+k)$-SE и $(m+k)$-SE, соответственно, такие, что*

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = (f_1(\bar{x}, \bar{y}), \ldots, f_n(\bar{x}, \bar{y}), h_1(\bar{y}), \ldots, h_k(\bar{y}))\,, \quad \bar{x} \in X^n, \quad \bar{y} \in X^k,$$

$$B(\bar{y}, \bar{z}) = (h_1(\bar{y}), \ldots, h_k(\bar{y}), g_1(\bar{y}, \bar{z}), \ldots, g_m(\bar{y}, \bar{z}))\,, \quad \bar{z} \in X^m,$$

Тогда k-амальгама $A \#_k B : X^{n+k+m} \to X^{n+k+m}$ A и B,

$$A \#_k B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (f_1(\bar{x}, \bar{y}), \ldots, f_n(\bar{x}, \bar{y}), h_1(\bar{y}), \ldots, h_k(\bar{y}), g_1(\bar{y}, \bar{z}), \ldots, g_m(\bar{y}, \bar{z}))$$

является решением $(n+k+m)$-SE тогда и только тогда, когда для любой пары индексов $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant m$ и для любого набора элементов $a_{\alpha,\beta} \in X$, $\alpha \in \{1, \ldots, n+k\}$, $\beta \in \{1, \ldots, k+m\}$ выполнено равенство:

$$f_i \begin{pmatrix} g_j(& a_{1,1}, & a_{1,2}, & \cdots & a_{1,k-1}, & a_{1,k}, & \cdots & a_{1,k+m} &), \\ g_j(& a_{2,1}, & a_{2,2}, & \cdots & a_{2,k-1}, & a_{2,k}, & \cdots & a_{2,k+m} &), \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ g_j(& a_{n+1,1}, & a_{n+1,2}, & \cdots & a_{n+1,k-1}, & a_{n+1,k}, & \cdots & a_{n+1,k+m} &), \\ g_j(& b^{n+1,1}, & a_{n+2,2}, & \cdots & a_{n+2,k-1}, & a_{n+2,k}, & \cdots & a_{n+2,k+m} &), \\ g_j(& b^{n+1,2}, & b^{n+2,2}, & \cdots & a_{n+3,k-1}, & a_{n+3,k}, & \cdots & a_{n+3,k+m} &), \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ g_j(& b^{n+1,k-1}, & b^{n+2,k-1}, & \cdots & b^{n+k-1,k-1} & a_{n+k,k}, & \cdots & a_{n+k,k+m} &) \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$g_j \begin{pmatrix} f_i(& a_{1,1}, & a_{2,1}, & \cdots & a_{n+1,1}, & b_{2,2}, & b_{3,2}, & \cdots & b_{k,2} &), \\ f_i(& a_{1,2}, & a_{2,2}, & \cdots & a_{n+1,2}, & a_{n+2,2}, & b_{3,3}, & \cdots & b_{k,3} &), \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_i(& a_{1,k-1}, & a_{2,k-1}, & \cdots & a_{n+1,k-1}, & a_{n+2,k-1}, & a_{n+3,k-1}, & \cdots & b_{k,k} &), \\ f_i(& a_{1,k}, & a_{2,k}, & \cdots & a_{n+1,k}, & a_{n+2,k}, & a_{n+3,k}, & \cdots & a_{n+k,k} &), \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_i(& a_{1,k+m}, & a_{2,k+m}, & \cdots & a_{n+1,k+m} & a_{n+2,k+m}, & a_{n+3,k+m}, & \cdots & a_{n+k,k+m} &) \end{pmatrix},$$

где

$$b^{i,j} := h_j(b^{n+1,i-n-1}, \ldots, b^{i-1,i-n-1}, a_{i,j}, \ldots, a_{i,k}),$$
$$b_{i,j} := h_j(a_{n+1,i}, \ldots, a_{n+i,i}, b_{i+1,i}, \ldots, b_{k,i}).$$

Доказательство. Утверждение становится очевидным, если посмотреть на матрицу MI_{n+k+m} для $(n+k+m)$-SE. Её подматрица размера $(n+k) \times (n+k+1)$ в левом верхнем углу и подматрица размера $(k+m) \times (k+m+1)$ в нижнем правом углу не зависят от остальной матрицы и соответствуют $(n+k)$-SE и $(k+m)$-SE.

В силу того, что функции h_i не зависят от первых n и последних m переменных, пересекающиеся части этих подматриц не зависят от остальной матрицы. Таким образом, $(n+k+m)$-SE распадается на $(n+k)$-SE и $(k+m)$-SE на индексах из соответствующих подматриц. Оставшиеся левая нижняя и правая верхняя подматрицы состоят из nm различных индексов и получаются друг из друга транспонированием. Явная запись $(n+k+m)$-SE на индексах из этих матриц даёт условие выше. $\square$

Чтобы проиллюстрировать конструкцию k-амальгамы рассмотрим несколько примеров.

Пример 4.15. Пусть X — множество и $A, B : X^2 \to X^2$ — решения YBE, имеющие форму

$$A(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)), \quad B(z,t) = (g_1(z,t), g_2(z,t)), \quad x,y,z,t \in X.$$

По лемме 2.1 отображения f_i удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}
f_1\left(f_1(x,y), z\right) &= f_1\left(f_1(x, f_2(y,z)), f_1(y,z)\right),\\
f_1\left(f_2(x,y), f_2(f_1(x,y),z)\right) &= f_2\left(f_1(x, f_2(y,z)), f_1(y,z)\right),\\
f_2\left(f_2(x,y), f_2(f_1(x,y),z)\right) &= f_2\left(x, f_2(y,z)\right),
\end{aligned}$$

и отображения g_i удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}
g_1\left(g_1(x,y), z\right) &= g_1\left(g_1(x, g_2(y,z)), g_1(y,z)\right),\\
g_1\left(g_2(x,y), g_2(g_1(x,y),z)\right) &= g_2\left(g_1(x, g_2(y,z)), g_1(y,z)\right),\\
g_2\left(g_2(x,y), g_2(g_1(x,y),z)\right) &= g_2\left(x, g_2(y,z)\right),
\end{aligned}$$

для всех $x,y,z,t \in X$. Положим

$$R(x,y,z,t) = (f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(z,t), g_2(z,t)), \quad x,y,z,t \in X.$$

Опишем условия, при которых отображение R удовлетворяет 4-SE,

$$R_{1234}R_{1567}R_{2589}R_{368,10}R_{479,10} = R_{479,10}R_{368,10}R_{2589}R_{1567}R_{1234}.$$

Прямые вычисления дают

$$R_{479,10}R_{368,10}R_{2589}R_{1567}R_{1234}(x,y,z,t,p,q,r,s,u,v) =$$

$$\begin{gathered}
= (f_1(f_1(x,y),p), \quad f_1(f_2(x,y), f_2(f_1(x,y),p)), \quad f_1(g_1(z,t), g_1(q,r)),\\
f_1(g_2(z,t), g_2(q,r)), f_2(f_2(x,y), f_2(f_1(x,y),p)),\\
(g_1(z,t), g_1(q,r)), \quad f_2(g_2(z,t), g_2(q,r)), \quad g_1(g_1(s,u),v),
\end{gathered}$$

$$g_1(g_2(s,u),g_2(g_1(s,u),v)),\quad g_2(g_2(s,u),g_2(g_1(s,u),v))),$$

и

$$R_{1234}R_{1567}R_{2589}R_{368,10}R_{479,10}(x,y,z,t,p,q,r,s,u,v)=$$
$$=(f_1(f_1(x,f_2(y,p)),f_1(y,p)),\ \ f_2(f_1(x,f_2(y,p)),f_1(y,p)),\ \ g_1(f_1(z,q),f_1(t,r)),$$
$$g_2(f_1(z,q),f_1(t,r)),f_2(x,f_2(y,p)),\quad g_1(f_2(z,q),f_2(t,r)),\quad g_2(f_2(z,q),f_2(t,r)),$$
$$g_1(g_1(s,g_2(u,v)),g_1(u,v)),g_2(g_1(s,g_2(u,v)),g_1(u,v)),\quad g_2(s,g_2(u,v))).$$

Приравнивая левую и правую части, получаем систему из 10 уравнений. 1, 2 и 5-е уравнения означают, что A — решение YBE. Последние три уравнения означают, что B — решение YBE. Таким образом, R — решение 4-SE если и только если

$$\begin{array}{rcl} f_1(g_1(z,t),g_1(q,r)) & = & g_1(f_1(z,q),f_1(t,r)),\\ f_1(g_2(z,t),g_2(q,r)) & = & g_2(f_1(z,q),f_1(t,r)),\\ f_2(g_1(z,t),g_1(q,r)) & = & g_2(f_2(z,q),f_2(t,r)),\\ f_2(g_2(z,t),g_2(q,r)) & = & g_2(f_2(z,q),f_2(t,r)). \end{array}$$

для всех $z,t,q,r\in X$. Заметим, что это — условия на f_i и g_j из Теоремы 4.14.

Пример 4.16. Пусть X — множество и $A,B: X^2\to X^2$ — решения YBE, такие, что

$$A(x,y)=(f(x,y),h(y)),\quad B(y,z)=(h(y),g(y,z)),\quad x,y,z\in X.$$

По Лемме 2.1 отображения f,g и h удовлетворяют уравнениям

$$f\left(f(x,y),z\right)=f\left(f(x,h(z)),f(y,z)\right),\quad f(h(y),h(z))=h(f(y,z)),$$

$$g\left(y,g(z,t)\right)=g\left(g(y,z),g(h(y),t)\right),\quad g(h(y),h(z))=h(g(y,z)),$$

для всех $x,y,z,t\in X$. Пусть

$$R(x,y,z)=(f(x,y),h(y),g(y,z))$$

отображение из X^3 в X^3. Тогда

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356}(x,y,z,t,p,q)=$$

$$=(f(f(x,h(t)),f(y,t)),h(f(y,t)),g(f(y,t),f(z,p)),h^2(t),g(h(t),h(p)),$$
$$g(t,g(p,q))),$$

и

$$R_{356}R_{246}R_{145}R_{123}(x,y,z,t,p,q) =$$
$$= (f(f(x,y),t), f(h(y),h(t)), f(g(y,z),g(t,p)), h^2(t), h(g(t,p)), g(g(t,p),$$
$$g(h(t),q))).$$

Следовательно, отображение R — решение TE тогда и только тогда, когда для всех $x,y,z,t,p,q \in X$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
f\left(f(x,h(t)), f(y,t)\right) &= f\left(f(x,y),t\right), \\
h(f(y,t)) &= f(h(y),h(t)), \\
g\left(f(y,t), f(z,p)\right) &= f\left(g(y,z), g(t,p)\right), \\
g(h(t),h(p)) &= h(g(t,p)), \\
g\left(t, g(p,q)\right) &= g\left(g(t,p), g(h(t),q)\right).
\end{aligned}$$

Если A и B — решения YBE, то первое, второе, четвертое и пятое равенства выполняются. Следовательно, R — решение TE тогда и только тогда, когда для всех $y,z,t,p \in X$ выполняется равенство

$$g\left(f(y,t), f(z,p)\right) = f\left(g(y,z), g(t,p)\right).$$

В данном случае, $n = m = k = 1$ и по теореме 4.14 отображение $A \,\#_1 B : X^3 \to X^3$,

$$A \,\#_1 B(x,y,z) = (f(x,y), h(y), g(y,z))$$

является решением TE тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство

$$g\left(f(a_{11},a_{21}), f(a_{12},a_{22})\right) = f\left(g(a_{11},a_{12}), g(a_{21},a_{22})\right).$$

Замечание 4.17. Заметим, что для $k \in \{0,1\}$ в условиях Теоремы 4.14 не учавствуют элементы $b^{i,j}$ и $b_{i,j}$. Легко увидеть, что при $k=0$ в этом случае, если $A\#_0 B$ — решение уравнения n-SE то и $B\#_0 A$ — решение уравнения n-SE.

4.2. Простые решения. В данном разделе мы определим некоторый класс решений уравнения n-симплекса.

Определение 4.18. Решение $T : X^n \to X^n$ уравнения n-симплекса называется простым, если $T(x_1,\dots,x_n) = (x_{s(1)},\dots,x_{s(n)})$, где $s : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ — некоторое отображение.

Пример 4.19. Пусть X — некоторое множество.

1) Тождественное отображение $\mathrm{id} : X \to X$ является простым решением 1-SE.

2) Отображения $P, Pr_1^2, Pr_2^2 : X^2 \to X^2$ определенные правилами

$$\begin{aligned} P: &\quad (x,y) \mapsto (y,x), \\ Pr_1^2: &\quad (x,y) \mapsto (x,x), \\ Pr_2^2: &\quad (x,y) \mapsto (y,y), \end{aligned}$$

для всех $x, y, z \in X$, простые решения уравнения 2-симплекса.

3) Отображение $Pr_2^3 : X^3 \to X^3$, заданное правилом

$$Pr_2^3 : (x,y,z) \mapsto (y,y,y),$$

для всех $x, y, z \in X$, является простым решением 3-симплекса.

Очевидно, что произведения простых решений являются простыми.

Из Теоремы 4.14 следует

Предложение 4.20. *Пусть $R : X^n \to X^n$ — решение уравнения n-симплекса и A — одно из следущих отображений $\{\mathrm{id}_X, P, Pr_1^2, Pr_2^2, Pr_2^3\}$. Тогда $R\#_0 A$ и $A\#_0 R$ — решения уравнения $(n+m)$-симплекса.*

Определение 4.21. Решение R называется неприводимым, если нет таких решений A и B, таких, что $R = A\#_0 B$.

Вопрос 4.22. 1) Существуют ли простые неприводимые решения n-SE для некоторого n, отличные от $\{\mathrm{id}_X, P, Pr_1^2, Pr_2^2, Pr_2^3\}$?

2) Известно, что перестановка P_{12} является решением YBE. Для каких $n > 2$ есть перестановки без неподвижных точек, являющихся решениями n-SE?

Пользуюясь Предложением 4.11 несложно найти некоторые перестановки, дающие решения n-SE.

4.3. Линейные и аффинные решения.

Линейные и аффинные решения YBE и TE рассматривались в работах [1], [17], [25], [26].

С помощью Теоремы 4.14 можно доказать следующее утверждение.

Предложение 4.23. *Пусть A и B — линейные решения n-SE и m-SE, соответственно. Тогда их 0-амальгама $A\#_0 B$ — линейное решение $(n+m)$-SE. Если A и B такие, что определена 1-амальгама $A\#_1 B$, тогда она является решением $(n+m-1)$-SE.*

Доказательство. Пусть $f\colon X^n \to X$ линейное отображение. Тогда можно записать его в матричном виде

$$f(\bar{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = \bar{x}^T[f] = [f]^T\bar{x},$$

где $[f]^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ вектор коэффициентов, $\bar{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор переменных и $\cdot^T$ — транспонирование. Условия Теоремы 4.14 для $k \in \{0, 1\}$ можно переписать в виде

$$[f]^T M[g] = [g]^T M^T[f],$$

где f — компонента отображения A, g — компонента отображения B и M — матрица размера $n \times m$.

Это означает, что для любых линейных решений A и B отображения $A \#_k B$ для $k \in \{0, 1\}$ будут решениями соответствующих n-SE. $\square$

4.4. Построение рациональных решений на основе линейных.

Рассмотрим линейное решение $(\mathbb{R}, R)$ уравнения YBE:

$$R(x, y) = (\alpha_1 x, (1 - \alpha_1\alpha_2)x + \alpha_2 y), \text{ где } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Предложение 4.23 дает нам решение $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ уравнения n-симплекса, имеющее вид

$$x_i \mapsto \begin{cases} \alpha_i x_i & \text{если } i \text{ нечетное,} \\ (1 - \alpha_{i-1}\alpha_i)x_{i-1} + \alpha_i x_i + (1 - \alpha_i\alpha_{i+1})x_{i+1} & \text{если } i \text{ четное} \\ (1 - \alpha_{i-1}\alpha_i)x_{n-1} + \alpha_i x_n & \text{если } i = n \text{ четное,} \end{cases}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Возьмем рациональную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой f^{-1} тоже рациональная функция, например дробно-линейное преобразование.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{a - cx}.$$

Сопряжем наше решение с помощью f. Получим рациональное решение $(f^{-1})^{\times n} R f^{\times n}$. Для дробно-линейного преобразования f, решение примет вид

$$x_i \mapsto \begin{cases} \dfrac{(\alpha_i ad - bc)x_i + (\alpha_i - 1)bd}{ca(1-\alpha_i)x_i + (ad - \alpha_i bc)} & \text{если } i \text{ нечетное}, \\[2ex] \dfrac{d\left(\beta_i \frac{ax_{i-1}+b}{cx_{i-1}+d} + \alpha_i \frac{ax_i+b}{cx_i+d} + \beta_{i+1}\frac{ax_{i+1}+b}{cx_{i+1}+d}\right) - b}{a - c\left(\beta_i \frac{ax_{i-1}+b}{cx_{i-1}+d} + \alpha_i \frac{ax_i+b}{cx_i+d} + \beta_{i+1}\frac{ax_{i+1}+b}{cx_{i+1}+d}\right)} & \text{если } i \text{ четное}, \\[2ex] \dfrac{d\left(\beta_n \frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+d} + \alpha_n \frac{ax_n+b}{cx_n+d}\right) - b}{a - c\left(\beta_n \frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+d} + \alpha_n \frac{ax_n+b}{cx_n+d}\right)} & \text{если } i = n \text{ четное}, \end{cases}$$

где $\beta_i = 1 - \alpha_{i-1}\alpha_i$ для $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Эта конструкция позволяет строить множество новых рациональных решений уравнения n-симплекса и интересно понять какие из рациональных решений получаются из линейных с помощью сопряжения.

Пример 4.24. Если взять

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1,\ \alpha_2 = \alpha_4 = 0,$$

тогда

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1.$$

Также пусть

$$a = c = 1, b = 0, d = -1,$$

тогда мы получим решение 4-SE

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \left(x_1, \frac{x_1 + x_3 - 2x_1x_3}{1 - x_1x_3}, x_3, x_3\right).$$

Пример 4.25. Пусть R решение 4-SE определенное формулой

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_4, x_1 + x_3, x_3, x_4).$$

Выбрав в качестве f функцию $\dfrac{x}{x-1}$ мы получим решение 4-SE

$$(f^{-1})^{\times n} R f^{\times n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_2 - x_4}{1 + x_2x_4}, \frac{x_1 + x_3 - 2x_1x_3}{1 - x_1x_3}, x_3, x_4\right).$$

Вопрос 4.26. Можно ли получить электрическое решение сопряжением линейного?

4.5. От решений уравнения n-симплекса к решениям уравнения $(n-1)$-симплекса. Мы определили k-амальгаму решений, позволяющую строить из пары решений новое решение в большей размерности. Теперь мы займемся обратной задачей: если (X, R) — это решение n-SE можно ли с помощью него построить решение $(n-1)$-SE?

Предложение 4.27. *Пусть $R : X^n \to X^n$, $n \geq 3$, это решение n-SE, и существует $x_0 \in X$ такой, что $R(x_0, \dots, x_0) = (x_0, \dots, x_0)$. Тогда*

$$R^r(x_1, \dots, x_{n-1}) := R(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

и

$$R^l(x_1, \dots, x_{n-1}) := R(x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$$

решения $(n-1)$-SE.

Доказательство. Если R является решением n-SE, тогда отображения $R_{\bar{i}}$, $1 \leq i \leq n+1$, действуют на X^N, где $N = n(n+1)/2$. Рассмотрим множество $X_{x_0} \subset X^N$ в котором первые n координат равны x_0,

$$X_{x_0} = \{(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N) \in X^N\}.$$

Ограничим решение n-SE на множество X_{x_0}. В правой части нашего уравнения мы сначала применяем отображение $R_{\bar{1}}$

$$R_{\bar{1}}(\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N) = R(x_0, \dots, x_0) \times \mathrm{id}^{N-n}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N) =$$

$$= (\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N).$$

Следовательно, $R_{\bar{1}}$ действует тождественно на X_{x_0} и на множестве X_{x_0} уравнение n-симплекса имеет вид

$$R_{\bar{1}} R_{\bar{2}} \dots R_{\overline{n+1}} = R_{\overline{n+1}} \dots R_{\bar{2}}.$$

Обе части $(n-1)$-SE действуют на $X^{N'}$ где $N' = N - n$. Если убрать первые n координат и рассмотреть уравнение выше, ограниченное на последние N' координат, мы получим решение $(n-1)$-SE после сдвига всех индексов на $-n$.

Чтобы доказать, что R^l — это решение $(n-1)$-SE, необходимо рассмотреть множество X^N, в котором координаты с индексами из $\overline{n+1}$ равны x_0, и заметить, что $R_{\overline{n+1}}$ действует на этом множестве тождественно.

□

§ 5. Тропикализация

5.1. Тропикализация рациональных решений. Под тропикализацией мы понимаем отображение из множества рациональных функций в множество кусочно-линейных функций. И. Дынников [14] использовал тропикализацию для изучения представлений группы кос B_n в группе перестановок $Sym(\mathbb{Z}^{2n})$. В частности, он нашел невырожденные решения YBE на $\mathbb{Z}^2$.

В данном разделе мы устанавливаем связь между рациональными и кусочно-линейными решениями уравнения n-симплекса для произвольного n.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, нам потребуется ввести некоторые определения и обозначения. Пусть $\mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — это поле рациональных функций над вещественными числами $\mathbb{R}$. Любое решение $(\mathbb{R}, R)$ уравнения n-SE, где

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_i \in \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

будем называть *рациональным решением.*

Обозначим за I_n подмножество ненулевых дробей вида $r = f/g \in \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таких, что ненулевые коэффициенты в числителе f равны 1 и свободный член равен нулю, а знаменатель g либо равен 1, либо его ненулевые коэффициенты равны 1, а свободный член равен нулю. Рациональное решение

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_i \in \mathbb{R}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

уравнения n-симплекса называется *I-рациональным* если все компоненты r_i лежат в I_n.

Пример 5.28. Легко заметить, что электрическое решение TE,

$$R_E(x, y, z) = \left(\frac{xy}{x + z + xyz},\ x + z + xyz,\ \frac{yz}{x + z + xyz} \right)$$

возникающее в теории электрических цепей как известное Y-Δ преобразовние электрической цепи является I-рациональным решением.

Отображение

$$R_e(x, y, z) = \left(\frac{xy}{x + z},\ x + z,\ \frac{yz}{x + z} \right)$$

полученное из R_E удалением мономов степени 3 также является I - рациональным решением.

Пусть PL_n — множество кусочно-линейных функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

Определение 5.29. *Тропикализация* — это отображение $(\cdot)^t : I_n \to PL_n$, определенное для функций $r = f/g \in I_n$, где

$$f = \sum_{i_1+\ldots+i_n>0} \alpha_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}, \quad g = \sum_{j_1+\ldots+j_n\geq 0} \beta_{j_1\ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$$

правилом

$$r^t = \begin{cases} \max\limits_{i_1+\ldots+i_n>0}\{i_1x_1+\ldots+i_nx_n\} - \max\limits_{j_1+\ldots+j_n>0}\{j_1x_1+\ldots+j_nx_n\}, & \text{при } g \neq 1; \\ \max\limits_{i_1+\ldots+i_n>0}\{i_1x_1+\ldots+i_nx_n\}, & \text{при } g = 1. \end{cases}$$

Заметим, что r^t можно получить из r с помощью рекурсивной процедуры, описанной ниже.

Предложение 5.30. *Пусть $r = r(x_1,\ldots,x_n)$, $r_1 = r_1(x_1,\ldots,x_n)$, $r_2 = r_2(x_1,\ldots,x_n)$ — это рациональные функции из I_n. Тогда*

1. *Если $r = x_i$, то $r^t = x_i$, для $i = 1,\ldots,n$;*
2. $(r_1+r_2)^t = \max\{r_1^t,\ r_2^t\}$;
3. $(r_1r_2)^t = r_1^t + r_2^t$;
4. $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^t = r_1^t - r_2^t$.

В частности, тропикализация корректно определена, т.е. из равенства r_1 и r_2 как рациональных функций следует равенство их тропикализаций.

Пусть $R(x_1,\ldots,x_n) = (r_1,r_2,\ldots,r_n) \in (I_n)^n$ рациональная векторнозначная функция от n переменных. Определим *тропикализацию* R покомпонентно:

$$R^t(x_1,\ldots,x_n) := (r_1^t(x_1,\ldots,x_n),\ldots,r_n^t(x_1,\ldots,x_n)).$$

Пример 5.31. Тропикализацией электрического решения R_E из Примера 5.28 является отображение

$$R_E^t(x,y,z) = (x+y-\max\{x,z,x+y+z\},\ \max\{x,z,x+y+z\},$$
$$y+z-\max\{x,z,x+y+z\}).$$

Тропикализацией R_e из Примера 5.28 является

$$R_e^t(x,y,z) = (x+y-\max\{x,z\},\ \max\{x,z\},\ y+z-\max\{x,z\}).$$

Отображения R_E^t и R_e^t — кусочно-линейные решения TE.

Замечание 5.32. Решение R_E^t состоит из 3 линейных частей:

$$R_1(x,y,z) = (y, x, y+z-x),$$

$$R_2(x,y,z) = (x+y-z, z, y),$$
$$R_3(x,y,z) = (-z, x+y+z, -x).$$

Можно рассмотреть эти отображения, как отображения на $\mathbb{R}^3$. Несложно показать, что $(\mathbb{R}, R_1)$ и $(\mathbb{R}, R_2)$ — решения TE, но $(\mathbb{R}, R_3)$ не является решением.

Определение 5.33. Пусть r_1 и r_2 — рациональные функции в $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ и $1 \leqslant k \leqslant n$. *$k$-композицией* функций r_1 и r_2 назовем рациональную функцию $r_1 \circ_k r_2 \in \mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$, определённую как

$$(r_1 \circ_k r_2)(x_1, \ldots, x_n) := r_1(x_1, \ldots, x_{k-1}, r_2(x_1, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Предложение 5.34. *Если $r_1, r_2 \in I_n$, то $(r_1 \circ_k r_2)^t = r_1^t \circ_k r_2^t$.*

Доказательство. Доказательство опирается на рекурсивную процедуру из Предложения 5.30. Если $r_1(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ — переменная, то утверждение очевидно. Если

$$r_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) * g(x_1, \ldots, x_n),$$

где f и g — рациональные функции из I_n и $* \in \{+, \cdot, /\}$, тогда

$$r_1^t(x_1, \ldots, x_n) = f^t(x_1, \ldots, x_n) *^t g^t(x_1, \ldots, x_n),$$

где $*^t \in \{\max, +, -\}$, и

$$(r_1 \circ_k r_2)(x_1, \ldots, x_n) = (f \circ_k r_2)(x_1, \ldots, x_n) * (g \circ_k r_2)(x_1, \ldots, x_n).$$

Следовательно, тропикализация

$$(r_1 \circ_k r_2)^t(x_1, \ldots, x_n) = (f \circ_k r_2)^t(x_1, \ldots, x_n) *^t (g \circ_k r_2)^t(x_1, \ldots, x_n).$$

Требуемое утверждение получается индукций по глубине рекурсии. □

Следствие 5.35. Тропикализация сохраняет композицию рациональных векторнозначных функций такого вида.

Теорема 5.36. *Если $(\mathbb{R}_{>0}, R)$, $R \in (I_n)^n$ — это решение уравнения n-симлекса на множестве положительных вещественных чисел, то его тропикализация $(\mathbb{R}_{>0}, R^t)$ тоже решение уравнения n-симплекса.*

Доказательство. Для любого $n \geqslant 2$, уравнение n-симплекса имеет следующий вид

$$R_{\overline{1}}R_{\overline{2}}\cdots R_{\overline{n+1}} = R_{\overline{n+1}}\cdots R_{\overline{2}}R_{\overline{1}}.$$

Применим тропикализацию к обеим частям:

$$(R_{\overline{1}}R_{\overline{2}}\cdots R_{\overline{n+1}})^t = (R_{\overline{n+1}}\cdots R_{\overline{2}}R_{\overline{1}})^t.$$

Тогда, по Следствию 5.35, выполняется следующее соотношение:

$$R^t_{\overline{1}}R^t_{\overline{2}}\cdots R^t_{\overline{n+1}} = R^t_{\overline{n+1}}\cdots R^t_{\overline{2}}R^t_{\overline{1}}.$$

Это означает, что R^t — решение уравнения n-симплекса. □

5.2. Формальная тропикализация.

Возникает естественный вопрос — "Можно ли провести преобразования на некотором классе решений уравнения n-симплекса, схожие с тропикализацией, чтобы вновь получить решение?". Разумеется, такие преобразования возможны. Такие преобразования, переводящие решения в решения мы будем называть формальной тропикализацией. Для того, чтобы дать точное определение формальной тропикализации, нам понадобится понятие частичной алгебры. Частичная алгебра — это обобщение универсальной алгебры, допускающее частичные операции [39, ch. 2]. В качестве простого примера частичной алгебры можно рассмотреть поле, где взятие обратного элемента по умножению не определено для нуля.

Определение 5.37. Пусть $\mathcal{A}$ — частичная алгебра с сигнатурой Σ и $R : A^n \to A^n$ — частичная функция, которую можно выразить как реализацию набора $(f_1, \dots, f_n)$ n-арных функций из сигнатуры $\Sigma' \subset \Sigma$, таких что (A, R) решение n-SE. Пусть $\mathcal{B}$ — частичная алгебра сигнатуры Ξ, и g — отображение, сопоставляющее n-арному функционалному символу из Σ' n-арную функцию сигнатуры Ξ. Тогда для каждого f_i можно определить $g(f_i)$ как n-арную функцию сигнатуры Ξ, где каждый функциональный символ из Σ' заменяется соотвествующей n-арной функцией сигнатуры Ξ. Отображение $R^g : B^n \to B^n$ реализующее $(g(f_1), \dots, g(f_n))$ будем называть *формальной тропикализацией* решения R если (B, R^g) — решение n-SE.

Предложение "(A, R) — решение уравнения n-симплекса" можно воспринимать как N уравнений Φ_R с N переменными, такие что при любом их означивании каждое уравнение выполняется или одна из его частей неопределена.

На эти уравнения можно смотреть, как на формулы в эквациональной логике. В контексте алгебр, эквациональная логика рассматривалась в [39, appendix 4].

В имеющихся обозначениях, пусть T — множество эквациональных формул сигнатуры Σ' таких, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет T и каждая формула Φ_R выводима из T. Такие формулы будем называть *аксиомами* решений (A, R).

Предложение 5.38. *Пусть (A, R) — решение n-SE и T — набор его аксиом. Если g такое отображение, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет $g(T) := \{g(\phi) : \phi \in T\}$ то (B, R^g) является формальной тропикализацией (A, R), т.е. это решение n-SE.*

Доказательство. Легко заметить, что множество $g(\Phi_R)$ совпадает с Φ_{R^g}. Так как Φ_R выводится из T, то множество $g(\Phi_R)$ выводится из $g(T)$. Из этого мы заключаем, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет Φ_{R^g}. □

Пример 5.39. Рассмотрим обычную тропикализацию рациональных функций. Мы можем воспринимать рациональные решения как решения в алгебраической системе $(X, \cdot^2, /^2, +^2, 1^0)$. Каждое такое решение может быть доказано при помощи следующего набора аксиом:

$$a{\cdot}b = b{\cdot}a; a{+}b = b{+}a; a{\cdot}(b{\cdot}c) = (a{\cdot}b){\cdot}c; a{+}(b{+}c) = (a{+}b){+}c; a{\cdot}(b{+}c) = a{\cdot}b{+}a{\cdot}c;$$

$$a/b = a \cdot (1/b); (1/a) \cdot (1/b) = 1/(a \cdot b); a \cdot 1 = a; a/1 = a; a/a = 1.$$

Поэтому мы можем построить отображение g в сигнатуру любой алгебраической системы, для которой выполнены эти аксиомы. Одной из таких алгебраических систем является $(X, +^2, -^2, \max^2, 0^0)$. Заметим, что пока мы рассматриваем умножение на постоянное натуральное число как многократную операцию сложения, мы можем использовать отображение g для рациональных решений с натуральными коэффициентами, и, с некоторыми оговорками, даже для рациональных решений с положительными рациональными коэффициентами.

Следствие 5.40. Пусть $(\mathcal{A}, R)$ — решение n-SE и $\mathcal{B}$ — некоторая подсистема в $\mathcal{A}$ того же класса, определенная сигнатурой Σ. Тогда $(\mathcal{B}, R)$ — решение n-SE.

Предложение 5.41. *Пусть $(\mathcal{A}, R)$ — решение n-SE и $\mathcal{B}$ — это гомоморфный образ алгебраической системы $\mathcal{A}$ под действием гомоморфизма h. Тогда $(\mathcal{B}, R^h)$ — решение n-SE.*

Одним из преимуществ формальной тропикализации является возможность смотреть на решения n-SE как на некоторые шаблоны, а не фиксированные функции. Рассмотрим следующий пример.

Пример 5.42. Известно, что

$$(x, y) \mapsto (ax, by + (1 - ab)x), \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}$$

решение YBE над $\mathbb{Z}$. Благодаря тому, что $\mathbb{Z}$ как $\mathbb{Z}$-модуль является генерическим для теории левых модулей над коммутативными кольцами, для произвольного коммутативного кольца R отображение

$$(x, y) \mapsto (ax, by + (1 - ab)x), \text{ где } a, b \in R$$

является решением YBE над любым левым R-модулем.

Из Предложения 5.41 можно вывести

Следствие 5.43. Пусть $(\mathcal{A}, R)$ — решение n-SE и T — его набор аксиом. Рассмотрим класс $\mathfrak{K}$ алгебраических систем определенный подмножеством аксиом $T' \subset T$ содержащим переменные. Для произвольной системы $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ верно, что если существует гомоморфизм $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, то $(\mathcal{B}, R^h)$ — решение n-SE.

Пример 5.44. Пусть $\mathfrak{R}$ — класс коммутативных колец с частичной операцией взятия обратного и $(\mathbb{R}, R)$ — решение n-SE вида $(R_1, \dots, R_n)$, где

$$R_i = \frac{\sum a_j \cdot x_1^{\alpha_{j,1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_{j,n}}}{\sum b_k \cdot x_1^{\beta_{k,1}} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_{k,n}}}, \text{ где } \alpha_{j,m}, \beta_{k,m} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ для всех } j, k, m.$$

В классе $\mathfrak{R}$ есть очевидный гомоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathcal{D}'[\mathbb{R}^m]$ из поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел со стандартными операциями сложения и умножения в линейное пространство $\mathcal{D}'[\mathbb{R}^m]$ обобщенных функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^m$, где операции — это сложение функций и свертка $*$. Гомоморфизм определяется как

$$r \mapsto r \cdot \delta \in \mathcal{D}'[\mathbb{R}^m], \quad r \in \mathbb{R},$$

где δ — это дельта функция Дирака. Тогда $(\mathcal{D}'[\mathbb{R}^m], R^h)$ — это рациональное решение n-SE. Компоненты функции R^h имеют вид

$$R_i^h = \left(\sum a_j \cdot x_1^{\alpha_{j,1}} * \ldots * x_n^{\alpha_{j,n}}\right) \left(\sum b_j \cdot x_1^{\beta_{j,1}} * \ldots * x_n^{\beta_{j,n}}\right)^{-1},$$

где степени — это многократно примененная свертка и взятие обратного рассматривается по отношению к свертке.

§ 6. Решения параметрических уравнений Янга-Бакстера

6.1. Расширения групп и YBE.

Пусть дано расширение групп

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ j\ } K \longrightarrow 1$$

и некоторое сечение $\varphi : K \to G$, т.е такое отображение, что $j \circ \varphi = \mathrm{id}_K$.

В [16] было доказано, что в случае, когда K абелева, квандл сопряжения $Conj(G)$ дает решение YBE,

$$R_{12}^{a,b} R_{13}^{a,c} R_{23}^{b,c} = R_{23}^{b,c} R_{13}^{a,c} R_{12}^{a,b}, \quad a, b, c \in K,$$

на H с параметрами в K.

Далее мы обобщаем этот результат. Представим элементы G как множество пар $(x, a) \in H \times K$ и предположим, что $i(x) = (x, 1)$ и $j((x, a)) = a$. Тогда умножение на G как на множестве пар определено формулой

$$(x, a) \circ (y, b) = (x \underset{a,b}{\circ} y, a \circ b) \ \text{ для некоторого } x \underset{a,b}{\circ} y \in H,$$

где $a \circ b$ — умножение в K. Для записи умножения в H мы будем использовать тот же символ $\circ$. Это согласуется с формулой

$$(x, 1) \circ (y, 1) = (x \circ y, 1).$$

Рассмотрим H как алгебраическую систему со множеством бинарных операций

$$\{\underset{a,b}{\circ} \mid a, b \in K\}.$$

Из аксиом группы следует, что эти операции удовлетворяют следующим аксиомам

1. Для любых $x \in H$ и $a \in K$ существует единственный $x^{-1}_{a,a^{-1}} = x^{-1}_{a^{-1},a} \in H$ такой, что
$$x^{-1}_{a^{-1},a} \underset{a^{-1},a}{\circ} x = x \underset{a,a^{-1}}{\circ} x^{-1}_{a,a^{-1}} = 1;$$
2. для всех $x, y, z \in H$ и $a, b, c \in K$ выполнено
$$(x \underset{a,b}{\circ} y) \underset{a \circ b, c}{\circ} z = x \underset{a, b \circ c}{\circ} (y \underset{b,c}{\circ} z).$$

Обобщим эту конструкцию на группы со структурой правого дистрбутивного группоида. Предположим, что на множестве G определена бинарная алгебраическая операция $* : G \times G \to G$ такая что $(G, *)$ — это правый дистрибутивный группоид, множество H замкнуто относительно $*$ и это умножение определяет структуру правого дистрибутивный группоида на K. Известно, что

$$R(g, h) = (g, h * g), \quad g, h \in G,$$

является решением YBE на G. Например, в [16] в качестве операции $*$ рассматривалась $a * b = b^{-1}ab$, $a, b \in G$, т.е. $(G, *)$ — квандл сопряжения.

Если предствить G как множество пар $(x, a) \in H \times K$, то

$$(x, a) * (y, b) = (x \underset{a,b}{*} y, a * b) \text{ для некоторого } x \underset{a,b}{*} y \in H.$$

Следовательно, на H мы получаем операцию $*$ и множество операций $\{\underset{a,b}{*} \mid a, b \in K\}$. Из правой дистрибутивности $*$ следует

Лемма 6.45. *Для любых $x, y, z \in H$ и $a, b, c \in K$ выполнено*

$$(x \underset{a,b}{*} y) \underset{a*b,c}{*} z = (x \underset{a,c}{*} z) \underset{a*c,b*c}{*} (y \underset{b,c}{*} z).$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Предложение 6.46. *Для всех $a, b, c \in K$ выполнено равенство*

$$R_{12}^{a,b}\, R_{13}^{a,c*b}\, R_{23}^{b,c} = R_{23}^{b*a,c*a}\, R_{13}^{a,c}\, R_{12}^{a,b}$$

в H, где

$$R^{u,v}(x, y) = (x, y \underset{v,u}{*} x), \quad u, v \in K.$$

Доказательство. Так как (G, R) является решением YBE, то для любых $g, h, k \in G$ выполнено

$$R_{12}\, R_{13}\, R_{23}(g, h, k) = R_{23}\, R_{13}\, R_{12}(g, h, k).$$

Пусть $g = (x, a)$, $h = (y, b)$, $k = (z, c)$. Тогда левая часть

$$R_{12}\, R_{13}\, R_{23}((x, a), (y, b), (z, c)) = R_{12}\, R_{13}((x, a), (y, b), (z, c) * (y, b)) =$$

$$= R_{12}\, R_{13}\left((x, a), (y, b), (z \underset{c,b}{*} y, c * b)\right) =$$

$$= R_{12}\left((x, a), (y, b), ((z \underset{c,b}{*} y) \underset{c*b,a}{*} x, (c * b) * a)\right) =$$

$$= \left((x, a), (y \underset{b,a}{*} x, b * a), ((z \underset{c,b}{*} y) \underset{c*b,a}{*} x, (c * b) * a)\right).$$

Правая часть,

$$R_{23}\, R_{13}\, R_{12}((x, a), (y, b), (z, c)) = R_{23}\, R_{13}\left((x, a), (y \underset{b,a}{*} x, b * a), (z, c)\right) =$$

$$= R_{23}\left((x,a),(y \underset{b,a}{*} x, b*a),(z \underset{c,a}{*} x, c*a)\right) =$$

$$= \left((x,a),(y \underset{b,a}{*} x, b*a),((z \underset{c,a}{*} x) \underset{c*a,b*a}{*} (y \underset{b,a}{*} x),(c*a)*(b*a))\right).$$

Если мы ограничим R на $H \times H$ и положим

$$R^{u,v}(x,y) = (x, y \underset{v,u}{*} x), \quad u,v \in K,$$

то получим требуемое равенство. □

Следствие 6.47. Если $(K,*)$ — тривиальный правый дистрибутивный группоид, т.е. $u*v = u$ для всех $u,v \in K$, тогда для любых $a,b,c \in K$ равенство

$$R_{12}^{a,b}\, R_{13}^{a,c}\, R_{23}^{b,c} = R_{23}^{b,c}\, R_{13}^{a,c}\, R_{12}^{a,b}$$

выполняется в H.

Пример 6.48. Пусть

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ j\ } K \longrightarrow 1$$

расширение групп, где K — группа экспоненты 2. Хорошо известно, что тогда K абелева. Например, можно взять $K \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. На группе $(G,\circ)$ существует элементарное решение $R : G^2 \to G^2$ уравнения Янга-Бакстера,

$$R(x,y) = (x, x \circ y^{-1} \circ x),$$

соответсвующее основному кванддлу $(Core(G),*)$ с операцией $y*x = x \circ y^{-1} \circ x$. Рассматривая G как множество пар (g,k), $g \in H$, $k \in K$, можно записать групповые операции в G в виде

$$(g_1,k_1) \circ (g_2,k_2) = (g_1 \underset{k_1,k_2}{\circ} g_2, k_1 \circ k_2),$$

$$(g_1,k_1)^{-1} = (g_{k,k^{-1}}^{-1}, k_1^{-1}),$$

где $\underset{a,b}{\circ} : H \to H$Ё— операция на H, зависящая от двух параметров a и b, а $g_{k,k^{-1}}^{-1}$ — обратный элемент по отношению к $\underset{k,k^{-1}}{\circ}$. Тогда отображение $R^{a,b} : H^2 \to H^2$,

$$R^{a,b}(x,y) = \left(x, (x \underset{a,b^{-1}}{\circ} y_{b^{-1},b}^{-1}) \underset{ab^{-1},a}{\circ} x\right)$$

является решением параметрического уравнения YBE

$$R_{12}^{a,b} R_{13}^{a,c} R_{23}^{b,c} = R_{23}^{b,c} R_{13}^{a,c} R_{12}^{a,b}.$$

Замечание 6.49. Известно, что на произвольной группе G можно ввести две различные струкутры вербального квандла: $Core(G)$ с операцией $g * h = hg^{-1}h$ и $Conj_n(G)$ с операцией $g *_n h = h^{-n}gh^n$ для натурального n. В предыдущем примере мы рассматривали $Core(G)$. Случай с квандлом $Conj_1(G)$ был изучен в [16]. Несложно по аналогии описать случай квандла $Conj_n(G)$. Квандл $Conj_n(G)$ дает решение параметрического уравнения YBE если подгруппа K^n в K, порожденная n-ми степенями, лежит в центре $Z(K)$ группы K.

6.2. Представления группы виртуальных кос и YBE.

В статьях [40] и [41] были построены представления группы виртуальных кос VB_n. В частности, в [40] было построено представление $\varphi : VB_n \longrightarrow Aut(F_{n,3n})$ в группу автоморфизмов свободного произведения $F_{n,3n} = F_n * \mathbb{Z}^{3n}$, где $F_n = \langle x_1 \ldots x_n \rangle$ — свободная группа ранга n и $\mathbb{Z}^{3n} =< w_1, \ldots, w_n, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n >$ — свободная абелева группа ранга $3n$. Оно задается своим действием на порождающих:

$$\varphi(\sigma_i) : \begin{cases} x_i \longrightarrow x_i x_{i+1}^{u_i} x_i^{-w_{i+1}u_{i+1}}, \\ x_{i+1} \longrightarrow x_i^{w_{i+1}}, \end{cases} \qquad \varphi(\sigma_i) : \begin{cases} w_i \longrightarrow w_{i+1}, \\ w_{i+1} \longrightarrow w_i, \end{cases}$$

$$\varphi(\sigma_i) : \begin{cases} u_i \longrightarrow u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longrightarrow u_i, \end{cases} \qquad \varphi(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \longrightarrow v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longrightarrow v_i, \end{cases}$$

$$\varphi(\rho_i) : \begin{cases} x_i \longrightarrow x_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ x_{i+1} \longrightarrow x_i^{v_{i+1}}, \end{cases} \qquad \varphi(\rho_i) : \begin{cases} w_i \longrightarrow w_{i+1}, \\ w_{i+1} \longrightarrow w_i, \end{cases}$$

$$\varphi(\rho_i) : \begin{cases} u_i \longrightarrow u_{i+1}, \\ u_{i+1} \longrightarrow u_i, \end{cases} \qquad \varphi(\rho_i) : \begin{cases} v_i \longrightarrow v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longrightarrow v_i, \end{cases}$$

Теорема 6.50. *Пусть $G = B * A$, где A и B — группы и A абелева. Тогда отображения*

$$R_{12}^{u,v,w}(x, y, z) = (x^w, xy^u x^{-wv}, z),$$

$$R_{13}^{u,p,q}(x, y, z) = (x^u, y, xz^u x^{-pq}),$$

$$R_{23}^{v,p,q}(x, y, z) = (x, y^q, yz^v y^{-pq}),$$

дают решение на группе B парметрического уравнения Янга-Бакстера:

$$R_{12}^{u,v,w} R_{13}^{u,p,q} R_{23}^{v,p,q} = R_{23}^{v,p,q} R_{13}^{u,p,q} R_{12}^{u,v,w}$$

с параметрами $u, v, w, p, q, u_1, v_1, u_2, v_2 \in A$.

Отображения

$$T_{12}^{u,v}(x,y,z)=(x^u,y^v,z),$$
$$T_{13}^{u_1,v_1}(x,y,z)=(x^{u_1},y,z^{v_1}),$$
$$T_{23}^{u_2,v_2}(x,y,z)=(x,y^{u_2},z^{v_2}),$$

дают решение на группе B *парметрического уравнения Янга-Бакстера:*

$$T_{12}^{u,v}T_{13}^{u_1,v_1}T_{23}^{u_2,v_2}=T_{23}^{u_2,v_2}T_{13}^{u_1,v_1}T_{12}^{u,v}$$

с параметрами из A.

Доказательство. Для группы $G=B*A$ рассмотрим отображения

$$R,T:G\times G\to G\times G$$

определенные формулами:

$$R^{u,v,w}(x,y)=(x^w,xy^ux^{-wv}),$$

$$T^{u,v}(x,y)=(x^u,y^v),\quad x,y\in B,\quad u,v,w\in A.$$

Мы хотим построить отображение R являющееся решением параметрического YBE

$$R_{12}^{u,v,w}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}R_{23}^{u_2,v_2,w_2}=R_{23}^{u_2,v_2,w_2}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}R_{12}^{u,v,w},$$

где

$$R_{12}^{u,v,w}(x,y,z)=(x^w,xy^ux^{-wv},z),$$
$$R_{13}^{u_1,v_1,w_1}(x,y,z)=(x^{w_1},y,xz^{u_1}x^{-w_1v_1}),$$
$$R_{23}^{u_2,v_2,w_2}(x,y,z)=(x,y^{w_2},yz^{u_2}y^{-w_2v_2}).$$

Действуя правой частью, получаем

$$R_{12}^{u,v,w}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}R_{23}^{u_2,v_2,w_2}(x,y,z)=$$

$$=R_{12}^{u,v,w}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}(x,y^{w_2},yz^{u_2}y^{-w_2v_2})=$$
$$=R_{12}^{u,v,w}(x^{w_1},y^{w_2},x(yz^{u_2}y^{-w_2v_2})^{u_1}x^{-w_1v_1})=$$
$$=(x^{w_1w},x^{w_1}y^{w_2u}x^{-w_1wv},xy^{u_1}z^{u_2u_1}y^{-w_2v_2u_1}x^{-w_1v_1}).$$

Действуя левой частью, получаем

$$R_{23}^{u_2,v_2,w_2}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}R_{12}^{u,v,w}(x,y,z)=R_{23}^{u_2,v_2,w_2}R_{13}^{u_1,v_1,w_1}(x^w,xy^ux^{-wv},z)=$$

$$=R_{23}^{u_2,v_2,w_2}(x^{ww_1},xy^ux^{-wv},x^wz^{u_1}x^{-ww_1v_1})=$$

$$= (x^{ww_1}, x^{w_2}y^{uw_2}x^{-wvw_2}, xy^u x^{-wv+wu_2}z^{u_1u_2}x^{-ww_1v_1u_2+wvw_2v_2}y^{-uw_2v_2}x^{-w_2v_2}).$$

Так как x, y, z произвольные элементы в B, мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} ww_1 = w_1w, \;\; w_1 = w_2, \;\; uw_2 = w_2u, \;\; wvw_2 = w_1wv, \\ u = u_1, \;\; w(u_2 - v) = 0, \;\; u_1u_2 = u_2u_1, \;\; w_2v_2 = w_1v_1, \\ w(vw_2v_2 - w_1v_1u_2) = 0, \;\; uv_2w_2 = w_2v_2u_1. \end{cases}$$

Из этой системы получаем: $w_1 = w_2, u = u_1, u_2 = v, v_2 = v_1$. Значит в $R_{12}^{u,v,w}$ есть три свободных параметра, в $R_{13}^{u_1,v_1,w_1} = R_{13}^{u,v_1,w_1}$ есть два свободных параметра, в $R_{23}^{u_2,v_2,w_2} = R_{23}^{v,v_1,w_1}$ нет свободных параметров.

Получаем решение параметрического YBE

$$R_{12}^{u,v,w}R_{13}^{u,p,q}R_{23}^{v,p,q} = R_{23}^{v,p,q}R_{13}^{u,p,q}R_{12}^{u,v,w}.$$

Рассмотрим отображение $T : G \times G \to G \times G$ заданное формулой $T^{u,v}(x, y) = (x^u, y^v)$. Тогда

$$T_{12}^{u,v}(x, y, z) = (x^u, y^v, z),$$

$$T_{13}^{u_1,v_1}(x, y, z) = (x^{u_1}, y, z^{v_1}),$$

$$T_{23}^{u_2,v_2}(x, y, z) = (x, y^{u_2}, z^{v_2}),$$

отображения из G^3 в G^3. Мы докажем, что они удовлетворяют некоторому параметрическому уравнению YBE.

Действуя правой частью, получаем

$$T_{12}^{u,v}T_{13}^{u_1,v_1}T_{23}^{u_2,v_2}(x, y, z) = T_{12}^{u,v}T_{13}^{u_1,v_1}(x, y^{u_2}, z^{v_2}) = T_{12}^{u,v}(x^{u_1}, y^{u_2}, z^{v_2v_1}) =$$

$$= (x^{u_1u}, y^{u_2v}, z^{v_2v_1}).$$

Действуя левой частью, получаем

$$T_{23}^{u_2,v_2}T_{13}^{u_1,v_1}T_{12}^{u,v}(x, y, z) = T_{23}^{u_2,v_2}T_{13}^{u_1,v_1}(x^u, y^v, z) = T_{23}^{u_2,v_2}(x^{uu_1}, y^v, z^{v_1}) =$$

$$= (x^{uu_1}, y^{vu_2}, z^{v_1v_2}).$$

Значит, мы имеем 6 свободных параметров. □

§ 7. Решения параметрических n-SE

В этом разделе мы обобщим результаты предыдущего.

Предположим, что, как и раньше, G — расширение подгруппы H группой K и (G, R) и (K, r) — решения n-SE на G и K, соответственно, такие, что коммутативна следующая диаграма

$$\begin{array}{ccc} G^n & \xrightarrow{j^n} & K^n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle R} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r} \\ G^n & \xrightarrow{j^n} & K^n \end{array}$$

где G^n и K^n — декартовы произведения.

Любой элемент x из G может быть представлен как пара (h, k) так, что $k = j(x) \in K$, $h = i^{-1}(x \cdot (\varphi(k))^{-1}) \in H$, где i — вложение H в G и $i(h) = (h, 1)$. Теперь мы можем представить

$$R(x_1, \dots, x_n) = R((h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots (h_n, k_n)) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in G^n.$$

И правую часть можно представить в виде

$(y_1, y_2, \dots, y_n) = ((h'_1, k'_1), (h'_2, k'_2), \dots (h'_n, k'_n))$ для некоторых $h'_i \in H, k'_i \in K$.

Тогда мы положим

$$R^{k_1, \cdots, k_n}(h_1, \dots, h_n) = (h'_1, h'_2, \dots h'_n)$$

и

$$r(k_1, \dots, k_n) = (k'_1, k'_2, \dots k'_n).$$

Решение R может быть переписанно в виде

$$R(x_1, \dots, x_n) = (R^{k_1, \cdots, k_n}(h_1, \dots, h_n), r(k_1, \dots, k_n)).$$

Так как R — решение n-SE на G, семейство функции $R^{k_1, \cdots, k_n}$ — решение параметрического n-SE на H. А именно

Предложение 7.51. *Пусть (G, R) — решение n-SE. Определим*

$$s_m(k_1, \dots, k_N) = p^{\overline{m}}(r_{\overline{m-1}} \circ \dots \circ r_{\overline{1}}(k_1, \dots, k_N)),$$
$$z_m(k_1, \dots, k_N) = p^{\overline{m}}(r_{\overline{m+1}} \circ \dots \circ r_{\overline{n+1}}(k_1, \dots, k_N)),$$

где $p^{\overline{m}}$ означает проекцию из K^N в K^n с ядром, состоящим из компонент, чьи номера не лежат в мультииндексе $\overline{m}$. Тогда $(H, R^{k_1, \cdots, k_n})$ — решение параметрического n-SE:

$$R_{\overline{1}}^{z_1(k)} R_{\overline{2}}^{z_2(k)} \cdots R_{\overline{n+1}}^{z_{n+1}(k)} = R_{\overline{n+1}}^{s_{n+1}(k)} \cdots R_{\overline{2}}^{s_2(k)} R_{\overline{1}}^{s_1(k)},$$

где $k = (k_1, \dots, k_N) \in K^N$ — вектор параметров.

В случае, когда $r = \mathrm{id}$ — тождетвенное отображение, получаем

$$R_{\overline{1}}^{k_{\overline{1}}} R_{\overline{2}}^{k_{\overline{2}}} \cdots R_{\overline{n+1}}^{k_{\overline{n+1}}} = R_{\overline{n+1}}^{k_{\overline{n+1}}} \cdots R_{\overline{2}}^{k_{\overline{2}}} R_{\overline{1}}^{k_{\overline{1}}}.$$

Также стоит отметить, что, если существует величина $k_0 \in K$ такая, что $r(k_0, \dots, k_0) = (k_0, \dots, k_0)$, то $(H, R^{k_0, \cdots, k_0})$ — решение n-SE.

7.1. Решения n-SE на расширениях групп.

Пусть

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} K \longrightarrow 1$$

расширение групп и (H, R), (K, T) — решения n-SE на H и K, соответственно.

Определение 7.52. Будем говорить, что (G, Q) — расширение решения (H, R) решением (K, T), если это решение n-SE, и следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} H^n \arrow[r, "i^n"] \arrow[d, "R"] & G^n \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "Q"] & K^n \arrow[d, "T"] \\ H^n \arrow[r, "i^n"] & G^n \arrow[r, "j^n"] & K^n \end{tikzcd}$$

Мы будем отождествлять группу H^n с её образом в G^n под действием i^n.

Предложение 7.53. *Для любых двух решений (H, R) и (K, T) уравнения n-симплекса существует решение (G, Q) уравнения n-симплекса, которое является расширением (H, R) с помощью (K, T).*

Доказательство. Рассмотрим соответствующее расширение декартовых степеней

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H^n \arrow[r, "i^n"] & G^n \arrow[r, bend left, "j^n"] & K^n \arrow[l, bend left, "\varphi"] \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Мы можем записать любой элемент g из G^n единственным образом как произведение $h_g k_g$, где

$$k_g = \varphi \circ j^n(k), \qquad h_g = g k_g^{-1},$$

и h_g — элемент из H^n. Таким образом мы можем представить G^n как декартово произведение носителей H^n и K^n. Теперь определим функцию

$$Q(g) = R(h_g)\varphi\left(T j^n(g)\right).$$

В терминах определённого выше декартового произведения она может быть переписанна как $(R(h_g), \varphi T j^n(k_g))$. Заметим, что функция F, определённая на $A \times B$ для некоторых множеств A и B, является решением тогда и только тогда, когда её проекции являются решениями. Следовательно Q — расширение решенеий, если и только если $\varphi T j^n(g)$ — решение на G.

Взяв $\varphi = \tilde{\varphi}^n$ для некоторого сечения $\tilde{\varphi}$ отображения $G \xrightarrow{j} K$, мы всегда получим решение, так как равенство

$$(\tilde{\varphi}^n T j^n)_{\bar{1}} \dots (\tilde{\varphi}^n T j^n)_{\overline{n+1}} = (\tilde{\varphi}^n T j^n)_{\overline{n+1}} \dots (\tilde{\varphi}^n T j^n)_{\bar{1}}$$

эквивалентно равенству

$$\tilde{\varphi}^N T_{\bar{1}}\, j^N \dots \tilde{\varphi}^N T_{\overline{n+1}}\, j^N = \tilde{\varphi}^N T_{\overline{n+1}}\, j^N \dots \tilde{\varphi}^N T_{\bar{1}}\, j^N.$$

Так как $j \circ \tilde{\varphi} = \mathrm{id}$, равенство выше выполненно если и только если (K, T) — решение. □

Следующий пример показывает, как, используя предложение 7.53, можно конструировать новые решения.

Пример 7.54. Рассмотрим аддитивную группу целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$ как расширение следующего вида

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Z} \xrightarrow{\ j\ } \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Здесь i — умножение на p и для любого $b \in \mathbb{Z}$ величина $j(b)$ — остаток b по модулю p. Для простоты, мы будем обозначать $\bar{b} := j(b)$ и, если $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, то $\bar{a} := (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \in \mathbb{Z}_p^n$.

Пусть R и T — решения n-SE на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$, соответственно. Зафикируем теоретико-множественное сечение $\varphi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}$. Каждый элемент $b \in \mathbb{Z}$ единственным образом можно представить в виде

$$(b - \varphi(\bar{b}),\ \bar{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p.$$

Значит, отображение

$$a \mapsto R(a - \varphi^n(\bar{a})) + \varphi^n T(\bar{a})$$

решение n-SE на $\mathbb{Z}$.

Например, пусть $n = 3$, $R = \mathrm{id}$ и $T : (x, y, z) \mapsto (x + 2y - 2z, 2z - y, z)$ — решения TE на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_p$, соответственно. Тогда отображение

$$(x, y, z) \mapsto \left(\overline{(x + 2y - 2z)} + x - \bar{x}, \overline{(2z - y)} + y - \bar{y}, z\right)$$

есть новое решение TE на $\mathbb{Z}$, где сечение вкладывает $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Z}$ как первые p неотрицательных элементов.

§ 8. Обратный предел решений

Пусть $\mathcal{A}$ — категория алгебраических систем в которой имеет смысл n-SE. Например, категория групп, колец, модулей и т.д. Определим категорию $\mathcal{CA}(n)$ пар (X, R_X) где X — объект в $\mathcal{A}$ и R_X — решение n-SE. Морфизмы в категории $\mathcal{CA}(n)$ — это морфизмы $\mathcal{A}$ с дополнительным условием,

$$Mor((X, R_X), (Y, R_Y)) = \{f \in Mor(X, Y) \mid f \circ R_X = R_Y \circ f\}.$$

Покажем как определить решения на обратных пределах. Определение обратного предела и его свойства можно найти в [42, Chapter 3]. Пусть D — малая категория и $\mathcal{F} : D \to \mathcal{CA}(n)$ — диаграмма. Применяя забывающий функтор $T : \mathcal{CA}(n) \to \mathcal{A}$, мы получаем диаграмму в $\mathcal{A}$.

Предложение 8.55. *Если существует обратный предел* $\lim(T \circ \mathcal{F})$ *в* $\mathcal{A}$*, то существует обратный предел* $\lim \mathcal{F}$ *в* $\mathcal{CA}(n)$.

Доказательство. Так как пределы коммутируют с пределами, имеем равенство
$$\lim_{a \in D} \mathcal{F}(a)^n = (\lim_{a \in D} \mathcal{F}(a))^n.$$
Пусть $X = \lim(T \circ \mathcal{F})^n$ и F — это $\mathcal{F}^n$. Для произвольного объекта $A \in D$ пусть $p_A \in \mathrm{Mor}(X, F(A))$ — морфизм из определения предела. Зададим отображение R на X как

$$(x_A)_{A \in D} \mapsto (R_A(x_A))_{A \in D}.$$

Во-первых, необходимо показать, что $R(X) \subset X$. Предположим, что существует $x \in X$ такой, что $R(x) \notin X$, значит, найдётся морфизм f_{AB} такой, что
$$f_{AB} \circ p_A(R(x)) \neq p_B(R(x)),$$
что эквивалентно
$$f_{AB} \circ R_A(x_A) \neq R_B(x_B).$$
Из условия на морфизмы в категории, имеем

$$R_B(f_{AB}(x_A)) \neq R_B(x_B).$$

И, так как $f(x_A) = x_B$, получаем противоречие.

Для любых объетов $A, B \in D$ и морфизма $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ F(A) \arrow[rr, "f_{AB}"] & & F(B) \end{tikzcd}$$

где $f_{AB} = F(f)$.
Так как $x_A = p_A(x)$, из условия на морфизмы, получаем

$$f_{AB} \circ R_A \circ p_A(x) = R_B \circ f_{AB} \circ p_A(x) = R_B \circ p_B(x).$$

Следовательно коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & (X, R) \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ (F(A), R_A) \arrow[rr, "f_{AB}"] & & (F(B), R_B) \end{tikzcd}$$

□

Следствие 8.56. Рассмотрим p-адические целые $\mathbf{Z}_p$ как обратный предел $\mathbb{Z}_{p^k}$ и предположим, что $(\mathbb{Z}_{p^k}, R_k)$, $k = 1, 2, \dots$ — решения n-SE такие, что $R_k \circ (\phi_k)^{\times n} = R_{k-1}$, где ϕ_k — проекция $\mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^{k-1}}$. Тогда это семейство определяет решение $(\mathbf{Z}_p, R)$ уравнения n-симплекса.

Пример 8.57. Возьмём семейство линейных решений TE на $\mathbb{Z}_{p^k}$,

$$R_k(x, y, z) = (a_k x, (1 - a_k b_k)x + b_k y, (1 - a_k b_k)c_k x + (1 - b_k c_k)y + c_k z),$$

и предположим, что коэффициенты удовлетворяют условиям

$$a_{k+1} \bmod p^k = a_k, \quad b_{k+1} \bmod p^k = b_k, \quad c_{k+1} \bmod p^k = c_k.$$

Тогда это семейство R_k порождает решение R на $\mathbf{Z}_p$,

$$R(x, y, z) = (ax, (1 - ab)x + by, (1 - ab)cx + (1 - bc)y + cz),$$

где a, b и c — p-адические числа, определяемые последовательностями

$$a = (a_1, \dots, a_k, \dots), \quad b = (b_1, \dots, b_k, \dots), \quad c = (c_1, \dots, c_k, \dots).$$

§ 9. Уравнение тетраэдра и соответствующие алгебраические системы

В этом разделе мы будем рассматривать уравнение тетраэдра (TE),

$$R_{123}R_{145}R_{246}R_{356} = R_{356}R_{246}R_{145}R_{123},$$

и под решением мы будем иметь ввиду теоретико-множественное решение этого уравнения.

9.1. 3-терноиды. Алгебраическая система с одной тернарной операцией называется *тернаром*, алгебраическая система с k тернарными операциями называется *k-терноидом*. Если $R = (f, g, h) : X^3 \to X^3$ — решение TE на некотором множестве X, тогда мы можем определить на X три тернарные операции $[\cdot,\cdot,\cdot]_i : X^3 \to X$, $i = 1, 2, 3$, по правилам

$$[a, b, c]_1 = f(a, b, c), \quad [a, b, c]_2 = g(a, b, c), \quad [a, b, c]_3 = h(a, b, c), \quad a, b, c \in X.$$

Для простоты, мы будем обозначать различные операции разными видами скобок и писать

$$[a, b, c]_1 = [a, b, c], \quad [a, b, c]_2 = \langle a, b, c\rangle, \quad [a, b, c]_3 = \{a, b, c\}.$$

Прямыми вычислениями мы получаем следующий результат.

Предложение 9.58. *Пусть $(X, [\cdot,\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle, \{\cdot,\cdot,\cdot\})$ — 3-терноид. Тогда он определяет решение TE если и только если следующие шесть равенств выполненны для всех $(x, y, z, t, p, q) \in X^6$*

$$\begin{gathered}
[[x, \langle y, t, \{z, p, q\}\rangle, \langle z, p, q\rangle], [y, t, \{z, p, q\}], [z, p, q]] = [[x, y, z], t, p],\\
\langle [x, \langle y, t, \{z, p, q\}\rangle, \langle z, p, q\rangle], [y, t, \{z, p, q\}], [z, p, q]\rangle =\\
= [\langle x, y, z\rangle, \langle [x, y, z], t, p\rangle, q],\\
\{[x, \langle y, t, \{z, p, q\}\rangle, \langle z, p, q\rangle], [y, t, \{z, p, q\}], [z, p, q]\} =\\
= [\{x, y, z\}, \{[x, y, z], t, p\}, \{\langle x, y, z\rangle, \langle [x, y, z], t, p\rangle, q\}],\\
\langle x, \langle y, t, \{z, p, q\}\rangle, \langle z, p, q\rangle\rangle = \langle \langle x, y, z\rangle, \langle [x, y, z], t, p\rangle, q\rangle,\\
\{x, \langle y, t, \{z, p, q\}\rangle, \langle z, p, q\rangle\} =\\
= \langle \{x, y, z\}, \{[x, y, z], t, p\}, \{\langle x, y, z\rangle, \langle [x, y, z], t, p\rangle, q\}\rangle,\\
\{y, t, \{z, p, q\}\} = \{\{x, y, z\}, \{[x, y, z], t, p\}, \{\langle x, y, z\rangle, \langle [x, y, z], t, p\rangle, q\}\}.
\end{gathered}$$

Следующие три следствия описывают элементарные решения TE.

Следствие 9.59. Пусть $(X, [\cdot,\cdot,\cdot])$ — тернар. Отображение $R : X^3 \to X^3$,

$$R(a, b, c) = ([a, b, c], b, c), \quad a, b, c \in X,$$

удовлетворяет TE если и только если

$$[[x, t, p], [y, t, q], [z, p, q]] = [[x, y, z], t, p], \quad \text{для всех } x, y, z, t, p, q \in X.$$

Следствие 9.60. Пусть $(X, [\cdot,\cdot,\cdot])$ — тернар. Отображение $R : X^3 \to X^3$,

$$R(a, b, c) = (a, [a, b, c], c), \quad a, b, c \in X.$$

удовлетворяет ТЕ если и только если

$$[[x, y, z], [x, t, p], q] = [x, [y, t, q], [z, p, q]], \quad \text{для всех } x, y, z, t, p, q \in X. \tag{9.1.11}$$

Следствие 9.61. Пусть $(X, [\cdot,\cdot,\cdot])$ — тернар. Отображение $R : X^3 \to X^3$,

$$R(a, b, c) = (a, b, [a, b, c]), \quad a, b, c \in X.$$

удовлетворяет ТЕ если и только если

$$[[x, y, z], [x, t, p], [y, t, q]] = [y, t, [z, p, q]], \quad \text{для всех } x, y, z, t, p, q \in X. \tag{9.1.12}$$

Замечание 9.62. Можно заметить, что равенство в Следствии 9.60 более симметричное, чем равенства в Следствии 9.59 и Следствии 9.61. В частности, оно имеет одинаковое число переменных в левой и правой части, в то время как в двух других уравнениях число переменных в левой и правой части отличается.

Мы будем называть решение из Следствия 9.59 *элементарным решением первого типа* или просто 1-*элементарным решением*; решение из Следствия 9.60 *элементарным решением второго типа* или 2-*элементарным решением*; и решение из Следствия 9.61 *элементарным решением третьего типа* или 3-*элементарным решением.*

Пусть $P_{13} : X^3 \to X^3$, $P_{13}(x, y, z) = (z, y, x)$ — перестановка первой и третьей компоненты. Если R — это 1-элементарное решение, то $P_{13}RP_{13}$ — это 3-элементарное решение, и наоборот. Поэтому, нам достаточно изучать 1- и 2-элементарные решения.

9.2. 1-элементарные решения.

Для изучения 1-элементарных решений ТЕ мы введём алгебраическую систему $(X, \overline{*}, \overline{\circ}, \overline{\triangleleft}, \overline{\triangleright})$ с четырьмя бинарными операциями удовлетворяющими соотношениям:

$$\begin{gathered}
x \,\overline{\circ}\, y = (x \,\overline{\triangleleft}\, z) \,\overline{\circ}\, (y \,\overline{\triangleleft}\, z);\\
(x \,\overline{\circ}\, y) \,\overline{*}\, (z \,\overline{\circ}\, w) = (x \,\overline{*}\, z) \,\overline{\circ}\, (y \,\overline{*}\, w);\\
(x \,\overline{\triangleright}\, y) \,\overline{\triangleright}\, z = (x \,\overline{\triangleright}\, z) \,\overline{\triangleright}\, (y \,\overline{*}\, z);\\
(x \,\overline{*}\, y) \,\overline{\triangleleft}\, z = x \,\overline{\triangleright}\, (y \,\overline{\circ}\, z).
\end{gathered}$$

Мы будем называть её первым тетраэдральным 4-группоидом или T_1-группоидом.

Предложение 9.63. *T_1-группоид порождает 1-элементарное решение (X,R) уравнения тетраэдра по правилу*

$$R(x,y,z)=(x \mathbin{\overline{\triangleright}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z),\ y,\ z), \quad x,y,z\in X.$$

Доказательство. Чтобы доказать, что R — решение, достаточно проверить, что оно удовлетворяет равенству из Следствия 9.59. Это равенство принимает вид

$$(x \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{\triangleright}} ((y \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} q)) \mathbin{\overline{\circ}} (z \mathbin{\overline{\triangleright}} (p \mathbin{\overline{\circ}} q))) = (x \mathbin{\overline{\triangleright}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z)) \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p).$$

Последовательно применяя соотношения к левой части получаем

$$\begin{gathered}(x \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{\triangleright}} ((y \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} q)) \mathbin{\overline{\circ}} (z \mathbin{\overline{\triangleright}} (p \mathbin{\overline{\circ}} q))) = \\ = (x \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{\triangleright}} (((y \mathbin{\overline{*}} t) \mathbin{\overline{\triangleleft}} q) \mathbin{\overline{\circ}} ((z \mathbin{\overline{*}} p) \mathbin{\overline{\triangleleft}} q)) = \\ = (x \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{\triangleright}} ((y \mathbin{\overline{*}} t) \mathbin{\overline{\circ}} (z \mathbin{\overline{*}} p)) = (x \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{\triangleright}} ((y \mathbin{\overline{\circ}} z) \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) = \\ = (x \mathbin{\overline{\triangleright}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z)) \mathbin{\overline{\triangleright}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p).\end{gathered}$$

□

Пример 9.64. Рассмотрим алгебраическую систему $(V, \overline{*}, \overline{\circ}, \overline{\triangleleft}, \overline{\triangleright})$ на векторном пространстве V с операциями определёнными следующим образом:

$$\begin{aligned} x \mathbin{\overline{*}} y &:= \beta x + (1-\beta) y, \\ x \mathbin{\overline{\circ}} y &:= x - y, \\ x \mathbin{\overline{\triangleleft}} y &:= x + (\beta - 1) y, \\ x \mathbin{\overline{\triangleright}} y &:= \beta x + (1-\beta) y, \end{aligned}$$

где β — некоторый эндоморфизм V. Эта система порождает решение

$$R(x,y,z) = (\beta x + (1-\beta) y + (\beta-1) z, y, z), \quad x,y,z \in V.$$

Существуют 2-группоиды, похожим образом дающие 1-элементарные решения. Рассмотрим систему $(X, \overline{*}, \overline{\circ})$ со следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} x \mathbin{\overline{\circ}} y = (x \mathbin{\overline{\circ}} z) \mathbin{\overline{\circ}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z); \\ (x \mathbin{\overline{*}} y) \mathbin{\overline{*}} z = (x \mathbin{\overline{*}} z) \mathbin{\overline{*}} (y \mathbin{\overline{*}} z); \\ (x \mathbin{\overline{\circ}} y) \mathbin{\overline{*}} (z \mathbin{\overline{\circ}} w) = (x \mathbin{\overline{*}} z) \mathbin{\overline{\circ}} (y \mathbin{\overline{*}} w). \end{gathered}$$

Назовём её редуцированным первым тетраэдральным 4-группоидом или просто редуцированным T_1-группоидом.

Предложение 9.65. *Редуцированный T_1-группоид порождает 1 - элементарное решение (X,R) уравнения тетраэдра, где*

$$R(x,y,z)=(x \mathbin{\overline{*}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z),\ y,\ z), \quad x,y,z\in X.$$

Доказательство. Чтобы R было решением, оно должно удовлетворять равенству из Следствия 9.59, которое принимает вид

$$(x \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{*}} ((y \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} q)) \mathbin{\overline{\circ}} (z \mathbin{\overline{*}} (p \mathbin{\overline{\circ}} q))) = (x \mathbin{\overline{*}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z)) \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p).$$

Последовательно применяя соотношения к левой части, получаем

$$\begin{gathered}(x \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{*}} ((y \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} q)) \mathbin{\overline{\circ}} (z \mathbin{\overline{*}} (p \mathbin{\overline{\circ}} q))) = \\ = (x \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{*}} ((y \mathbin{\overline{\circ}} z) \mathbin{\overline{*}} ((t \mathbin{\overline{\circ}} q) \mathbin{\overline{\circ}} (p \mathbin{\overline{\circ}} q))) = \\ = (x \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) \mathbin{\overline{*}} ((y \mathbin{\overline{\circ}} z) \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p)) = (x \mathbin{\overline{*}} (y \mathbin{\overline{\circ}} z)) \mathbin{\overline{*}} (t \mathbin{\overline{\circ}} p).\end{gathered}$$

□

Пример 9.66. Рассмотрим алгебраическую систему $(V, \overline{*}, \overline{\circ})$ на векторном пространстве V с операциями определёнными следующим образом:

$$\begin{aligned} x \mathbin{\overline{*}} y &:= \beta x + (1-\beta) y, \\ x \mathbin{\overline{\circ}} y &:= x - y, \end{aligned}$$

где β — некоторый фиксированный эндоморфизм V. Из этой системы мы получаем 1-элементарное решение

$$R(x,y,z) = (\beta x + (1-\beta) y + (\beta - 1) z, y, z), \quad x, y, z \in V.$$

Заметим, что эта система очень похожа на систему из примера 9.64. В общем случае верно, что если в T_1-группоиде $x \mathbin{\overline{*}} y = x \mathbin{\overline{\triangleright}} y$, то при отбрасывании операций $x \mathbin{\overline{\triangleleft}} y$ и $x \mathbin{\overline{\triangleright}} y$ получается редуцированный T_1-группоид. Не ясно существуют ли такие T_1-группоиды, что отбрасывание $x \mathbin{\overline{\triangleleft}} y$ и $x \mathbin{\overline{\triangleright}} y$ не даст редуцированный T_1-группоид.

9.3. 2-элементарные решения.

Для изучения 2-элементарных решений ТЕ мы введём алгебраическую систему $(X, *, \circ, \triangleleft, \triangleright)$ с четырьмя бинарными операциями удовлетворяющими соотношениям:

$$\begin{gathered} x \triangleright (y * z) = (x \triangleright y) * (x \triangleright z), \\ (x \circ y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \circ (y \triangleleft z), \\ (x * y) \circ (z * w) = (x \circ z) * (y \circ w), \\ (x \triangleright y) \triangleleft z = x \triangleright (y \triangleleft z), \\ (x * y) \triangleleft z = x \triangleright (y \circ z). \end{gathered}$$

Дальше мы будем называть эту алгебраическую систему вторым тетраэдральным 4-группоидом и обозначать её T_2-группоидом.

Предложение 9.67. *Любой T_2-группоид X определяет 2-элементарное решение (X,R) уравнения тетраэдра по формуле*

$$R(x,y,z) = (x,\ x \triangleright (y \circ z),\ z), \quad x,y,z \in X.$$

Доказательство. Чтобы R было решением, оно должно удовлетворять равенству из Следствия 9.60. Это равенство принмает форму

$$x \triangleright ((y \triangleright (t \circ q)) \circ (z \triangleright (p \circ q))) = (x \triangleright (y \circ z)) \triangleright ((x \triangleright (t \circ p)) \circ q).$$

Применяя соотношения T_2-группоида к левой части этого равенства, получаем

$$\begin{gathered} x \triangleright ((y \triangleright (t \circ q)) \circ (z \triangleright (p \circ q))) = x \triangleright (((y * t) \triangleleft q) \circ ((z * p) \triangleleft q)) = \\ = x \triangleright (((y * t) \circ (z * p)) \triangleleft q) = (x \triangleright ((y \circ z) * (t \circ p))) \triangleleft q = \\ = ((x \triangleright (y \circ z)) * (x \triangleright (t \circ p))) \triangleleft q = (x \triangleright (y \circ z)) \triangleright ((x \triangleright (t \circ p)) \circ q). \end{gathered}$$

□

Теперь, предположим, что у нас есть 2-элементарное решение (X,R) уравнения тетраэдра, где

$$R(x,y,z) = (x, [x,y,z], z), \quad x,y,z \in X.$$

Мы можем задаться вопросом: определено ли это решение T_2-группоидом?

Из следующего предложения следует, что при некоторых условиях на тернар $(X,[\cdot,\cdot,\cdot])$, ответ положительный.

Предложение 9.68. *Предположим, что тернар $(X,[\cdot,\cdot,\cdot])$ определяет решение TE, и существуют элемент $c \in X$ такой, что $[c,c,c]=c$, и функция $\{\cdot\} : X \to X$ такая, что $\{[c,x,c]\} = [c,\{x\},c] = x$, $[\{x\},\{y\},c] = \{[x,y,c]\}$ и $[c,\{x\},\{y\}] = \{[c,x,y]\}$. Если мы зададим*

$$x{*}y = [x,y,c], \qquad x{\circ}y = [c,x,y], \qquad x{\triangleright}y = [x,\{y\},c], \qquad x{\triangleleft}y = [c,\{x\},y],$$

для всех $x,y \in X$, то $(X,*,\circ,\triangleright,\triangleleft)$ — T_2-группоид.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&(x * y) \circ (z * w) = [c, [x, y, c], [z, w, c]] = \\
&\qquad\qquad = [[c, x, z], [c, y, w], c] = (x \circ z) * (y \circ w); \\
&x \triangleright (y * z) = [x, \{[y, z, c]\}, c] = [x, [\{y\}, \{z\}, c], [c, c, c]] = \\
&\qquad\qquad = [[x, \{y\}, c], [x, \{z\}, c], c] = (x \triangleright y) * (x \triangleright z); \\
&(x \circ y) \triangleleft z = [c, \{[c, x, y]\}, z] = [[c, c, c], [c, \{x\}, \{y\}], z] = \\
&\qquad\qquad = [c, [c, \{x\}, z], [c, \{y\}, z]] = (x \triangleleft z) \circ (y \triangleleft z); \\
&(x \triangleright y) \triangleleft z = [c, \{[x, \{y\}, c]\}, z] = \{[c, [x, \{y\}, c], [c, z, c]]\} = \\
&\qquad\qquad = \{[[c, x, c], [c, \{y\}, z], c]\} = [x, \{[c, \{y\}, z]\}, c] = x \triangleright (y \triangleleft z); \\
&x \triangleright (y \circ z) = [x, \{[c, y, z]\}, c] = \{[[c, x, c], [c, y, z], c]\} = \\
&\qquad\qquad = \{[c, [x, y, c], [c, z, c]]\} = [c, \{[x, y, c]\}, z] = (x * y) \triangleleft z,
\end{aligned}$$

т.е. все соотношения T_2-группоида выполненны. □

А значит, используя операции, построенные в предыдущем предложении, можно построить отображение

$$(x, y, z) \mapsto (x, \triangleright(y \circ z), z), \quad x, y, z \in X,$$

дающее решение ТЕ.

Вопрос 9.69. Верно ли, что это решение совпадает с исходным? Другими словами, верно ли, что $[x, y, z] = x \triangleright (y \circ z)$ для всех $x, y, z \in X$?

Пример 9.70. Рассмотрим алгебраическую систему $(V, *, \circ, \triangleleft, \triangleright)$, где V — векторное пространство и операции определены как:

$$\begin{aligned}
x * y &:= (1 - \beta)x + \beta y, \\
x \circ y &:= \beta x + (1 - \beta)y, \\
x \triangleleft y &:= (1 - \beta)x + y, \\
x \triangleright y &:= x + (1 - \beta)y,
\end{aligned}$$

где β — некоторый фиксированный эндоморфизм V. Нетрудно проверить, что эта система — T_2-группоид. И мы можем получить 2-элементарное решение (V, R) если положим

$$R(x, y, z) = (x, (1 - \beta)x + \beta y + (1 - \beta)z, z), \quad x, y, z \in V.$$

С другой стороны, если β автоморфизм, то взяв $c := 0$ и $\{x\} := \beta^{-1}x$ мы можем извлечь T_2-группоид $(V, *, \circ, \triangleleft, \triangleright)$ из решения (V, R).

Замечание 9.71. Несложно заметить, что в T_2-группоиде $(V, *, \circ, \triangleleft, \triangleright)$ из предыдущего примера алгебраические системы $(V, *)$ и $(V, \circ)$ — квандлы Александера.

§ 10. Вербальные решения

Пусть G — группа, *вербальным решением* n-SE называется решение (G, R) вида

$$R(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (w_1(g_1, g_2, \ldots, g_n), w_2(g_1, g_2, \ldots, g_n), \ldots, w_n(g_1, g_2, \ldots, g_n)),$$

где $w_i = w_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — приведённые слова в свободной группе $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Вербальное решение R называется k-*элементарным* если каждое слово w_i, за исключением w_k, равно x_i.

10.1. Универсальные вербальные решения. Если (G, R) — вербальное решение n-SE и $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм, то $(Ker(\varphi), R|_{Ker(\varphi)})$ — решение n-SE, и оно даёт решение $(\varphi(G), R^{\varphi})$, где

$$R^{\varphi}(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \ldots, \varphi(g_n)) = (\varphi(g_1'), \varphi(g_2'), \ldots, \varphi(g_n')),$$

и

$$R(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_1', g_2', \ldots, g_n').$$

Как известно, для любой группы G существует отображение $R : G^2 \to G^2$ являющееся элементарным решением YBE. Такое решение можно построить, взяв некоторый квандл на G, например, квандл сопряжения $Conj(G)$ или основной квандл $Core(G)$. В общем случае можно сформулировать

Вопрос 10.72. Пусть G — группа. Существует ли отображение $R : G^n \to G^n$, $n > 2$, дающее нетривиальные невырожденные (элементарные) решения n-SE?

Под тривиальным решением мы имеем ввиду перестановку компонент.

В этом параграфе мы рассматриваем элементарные вербальные решения TE на произвольной группе, это эквивалентно изучению решений на свободной группе F_6. Для начала напомним некоторые определения из комбинаторной теории групп. Мы будем рассматривать группу F_n как свободное произведение n копий бесконечной циклической группы и представлять элементы из F_n как приведённые слова

$$w = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \ldots x_{i_k}^{\alpha_k}, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad i_j \neq i_{j+1} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, k-1. \quad (10.1.13)$$

Подслово $x_{i_j}^{\alpha_j}$ называется *слогом.* Число k называют *слоговой длиной* слова w и обозначают $l(w)$, i*-слоговая длина* слова w — это число слогов лежащих в $\langle x_i \rangle$, она обозначается $l_i(w)$. Например, для слова $w = x_3^{-5}x_1^2x_2^{-7}x_1x_3^8 \in F_3$ имеем $l(w) = 5$, $l_1(w) = l_3(w) = 2$, $l_2(w) = 1$.

Мы также будем говорить о циклически приведённых формах слов. Слово (10.1.13) называется *циклически приведённым* если либо $i_1 \neq i_k$, либо $i_1 = i_k$ и $\alpha_1\alpha_k > 0$. Не приведённое циклически слово w имеет вид $w \equiv u^{-1}w_0u$, где w_0 — циклически приведённое подслово слова w, а $\equiv$ означет равенство слов (побуквенное). При этом $w^m \equiv u^{-1}w_0^m u$ для любого целого m. Например, $x_3^{-5}x_1^2x_2^{-7}x_1x_3^8 = x_3^{-5}(x_1^2x_2^{-7}x_1x_3^3)x_3^5$ и подслово $x_1^2x_2^{-7}x_1x_3^3$ циклически приведено.

Лемма 10.73. *Пусть $w = w(x_1, \dots, x_n)$ — приведённое слово в свободной группе F_n, и $l_j(w) = k > 0$ для некоторого j, $1 \leq j \leq n$. Тогда $l_j(w^m) \geq k$ для любого целого $m \neq 0$. Более того, первый и последний символы w совпадают, соответственно, с первыми и последними символами w^m для всех положительных m.*

Доказательство. Мы будем предполагать, что $m > 0$. Доказательство для случая $m < 0$ проводится аналогично.

Пусть, для начала, слово w циклически приведено. Если $l(w) = l_j(w) = 1$, то $w = x_j^\alpha$ для некоторого ненулевого целого α и утверждение, очевидно, истинно. Предположим, что $l(w) > 1$ и w имеет форму (10.1.13). Если i_1 или i_k отличны от j, то $l_j(w^m) = km$. Если $i_1 = i_k = j$, тогда $k > 1$ и

$$l_j(w^m) = km - (m-1) = m(k-1) + 1.$$

Так как $m \geq 2$, имеем $m(k-1) + 1 \geq 2(k-1) + 1 = 2k - 1 \geq k$.

Если w не циклически приведено, тогда $w \equiv u^{-1}w_0u$. Если $k = l_j(w) = 2l_j(u) + l_j(w_0)$, тогда $l_j(w^m) = 2l_j(u) + l_j(w_0^m)$. Из вышесказанного $l_j(w_0^m) \geq l_j(w_0)$. Таким образом, $l_j(w^m) \geq 2l_j(u) + l_j(w_0) \geq k$. Пусть $k = l_j(w) = 2l_j(u) + l_j(w_0) - 1$, это возможно, если последний слог u^{-1} и первый слог w_0 оба лежат в $\langle x_j \rangle$, или последний слог w_0 и первый слог u лежат в $\langle x_j \rangle$ (заметим, что два этих случая не могут выполняться одновременно). Тогда

$$l_j(w^m) = 2l_j(u) + l_j(w_0^m) - 1 \geq 2l_j(u) + l_j(w_0) - 1 \geq k.$$

Вторая часть леммы тривиальна. □

Лемма 10.74. *Пусть $w = w(x_1, x_2)$ и $g = g(x_1, x_2, x_3)$ — приведённые слова в свободной группе F_5 такие, что $l(w) = k$, $l_3(g) = m > 0$, $l(g) > 1$. Для $n = l_3(w(g(x_1, x_2, x_3), g(x_4, x_5, x_3)))$ имеют место следующие неравенства:*

$$n \geq m, \qquad \text{если } k = 1, \tag{10.1.14}$$

$$n \geq 2(m-1) + (m-2)(k-2), \qquad \text{если } k \geq 2,\ m \geq 2. \tag{10.1.15}$$

Доказательство. Предположим, что

$$w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1} x_1^{\alpha_2} x_2^{\beta_2} \dots x_1^{\alpha_s} x_2^{\beta_s}, \ \ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}, \text{ и только } \alpha_1 \text{ и } \beta_s \text{ могут быть нулями.} \tag{10.1.16}$$

Если $k = 1$, то w является либо степенью x_1, либо степенью x_2. В этом случае необходимое утверждение следует из Леммы 10.73.

Докажем (10.1.15). Если $m \geq 2$, то в слове $g(x_1, x_2, x_3)^a \, g(x_4, x_5, x_3)^b$ сокращение x_3 может произойти лишь единожды, а значит,

$$l_3(g(x_1, x_2, x_3)^a \, g(x_4, x_5, x_3)^b) \geq (m-1) + (m-1).$$

Далее, в слове $g(x_1, x_2, x_3)^a \, g(x_4, x_5, x_3)^b \, g(x_1, x_2, x_3)^c$ сокращение x_3 может произойти лишь дважды, а значит,

$$l_3(g(x_1, x_2, x_3)^a \, g(x_4, x_5, x_3)^b \, g(x_1, x_2, x_3)^c) \geq (m-1) + (m-2) + (m-1).$$

Повторяя это рассуждение k раз, мы получим (10.1.15). $\square$

Используя обозначения из предыдущей леммы имеем

Лемма 10.75. *Пусть $w = w(x_1, x_2)$, $l(w) = k \geq 2$ и*

$$g(x_1, x_2, x_3) \equiv g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2), \quad g_i \not\equiv 1, \quad \alpha \neq 0.$$

Если $n = l_3(w(g(x_1, x_2, x_3), g(x_4, x_5, x_3)))$, то $n = k$.

Доказательство. Предположим, что

$$w = x_1^{\alpha_1} x_2^{\beta_1} x_1^{\alpha_2} x_2^{\beta_2} \dots x_1^{\alpha_s} x_2^{\beta_s}, \ \ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}, \text{ и только } \alpha_1 \text{ и } \beta_s \text{ могут быть нулями.} \tag{10.1.17}$$

Распишем

$$w(g(x_1, x_2, x_3), g(x_4, x_5, x_3)) = w(g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2), g_1(x_4, x_5) \, x_3^\alpha \, g_2(x_4, x_5))$$

$$= (g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2))^{\alpha_1} \, (g_1(x_4, x_5) \, x_3^\alpha \, g_2(x_4, x_5))^{\beta_1} \, (g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2))^{\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot (g_1(x_4, x_5) \, x_3^\alpha \, g_2(x_4, x_5))^{\beta_2} \dots (g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2))^{\alpha_s} \, (g_1(x_4, x_5) \, x_3^\alpha \, g_2(x_4, x_5))^{\beta_s}.$$

Из нетривиальности слов g_1 и g_2 можем видеть, что сокращения возможны только внутри слов

$$(g_1(x_1, x_2) \, x_3^\alpha \, g_2(x_1, x_2))^{\alpha_i} \ \text{ или } \ (g_1(x_4, x_5) \, x_3^\alpha \, g_2(x_4, x_5))^{\beta_i},$$

но невозможны между этими словами. Таким образом $n = k$. $\square$

Описание вербальных 3-элементарных решений TE даёт следующая теорема.

Теорема 10.76. *Пусть $R\colon G^3 \to G^3$ — вербальное 3-элементарное решение TE в произвольной группе G тогда выполненно одно из следующего:*

1. $R(x, y, z) = (x, y, yx^{-1})$,
2. $R(x, y, z) = (x, y, x^{-1}y)$,
3. $R(x, y, z) = (x, y, w(y, z))$, *где* $R'(y, z) = (y, w(y, z))$ *— решение YBE в произвольной группе G.*

Доказательство. Если

$$R(x, y, z) = (x, y, w(x, y, z)), \quad x, y, z \in G,$$

решение TE, то по следствию 9.59

$$w(w(x, y, z), w(x, t, p), w(y, t, q)) = w(y, t, w(z, p, q)). \tag{10.1.18}$$

Предположим, для начала, что w не содержит x, т.е. $w(x, y, z) = w(y, z)$. В этом случае равенство (10.1.18) принимает вид

$$w(w(t, p), w(t, q)) = w(t, w(p, q)).$$

Таким образом $R'(y, z) = (y, w(y, z))$ — решение YBE в произвольной группе G.

Далее, предположим, что $w(x, y, z)$ зависит от x. Мы рассмотрим 3 случая:

Случай 1: $w(x, y, z) = w(x, z)$.
В этом случае (10.1.18) переписывается как

$$w(w(x, z), w(y, q)) = w(y, w(z, q)). \tag{10.1.19}$$

Легко видеть, что левая часть равенства зависит от x. Таким образом этот случай не возможен.

Случай 2: $w(x, y, z) = w(x, y, z)$, т.е. w зависит от всех порождающих. В этом случае мы можем предположить, что
$w(x, y, z) \equiv z^{\alpha_1} g_1(x, y) z^{\alpha_2} \dots g_n(x, y) z^{\alpha_{n+1}}, \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}$, и только α_1 и α_{n+1} могут быть нулями.

Значит мы можем переписать левую часть (10.1.18):

$$(w(y, p, q))^{\alpha_1} g_1(w(x, y, z), w(x, t, p))(w(y, p, q))^{\alpha_2} \dots g_n(w(x, y, z), w(x, t, p))$$

$$(w(y, p, q))^{\alpha_{n+1}}.$$

Заметим, что для каждого $g_i(x_1, x_2)$ слово $g_i(w(x, y, z), w(x, t, p))$ зависит от t и z. Более того, так как $(w(y, p, q))^{\alpha_i}$ зависит от q для всех ненулевых

α_i, слова $g_i(w(x,y,z),\ w(x,t,p))$ не должны зависеть от x. Из леммы 10.75 следует, что если слово $g_i(w(x,y,z),\ w(x,t,p))$ не зависит от x, то $w = x^{\gamma}h(y,z)$ или $w = h(y,z)x^{\gamma}$ для некоторых $0 \neq \gamma \in \mathbb{Z}$ и $h(x,y) \in F_2(x,y)$.

Предположим, что $w = x^{\gamma}h(y,z)$. Если существует $g_{i_0} = y^k$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то по лемме 10.73 слово $g_{i_0}(w(x,y,z), w(x,t,p))$ зависит от x. Получаем противоречие. Следовательно $h(y,z) = y^{\alpha}z^{\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Таким образом в этом случае получаем

$$(x^{\gamma}y^{\alpha}z^{\beta})^{\gamma}(x^{\gamma}t^{\alpha}p^{\beta})^{\alpha}(y^{\gamma}p^{\alpha}q^{\beta})^{\beta} = y^{\gamma}t^{\alpha}(z^{\gamma}p^{\alpha}q^{\beta})^{\beta}.$$

Сокращения x могут произойти только если $\gamma = -1, \alpha = 1$, значит

$$z^{-\beta}y^{-1}tp^{\beta}(y^{-1}pq^{\beta})^{\beta} = y^{-1}t(z^{-1}pq^{\beta})^{\beta}.$$

И так как $\beta \neq 0$ мы получаем противоречие.

Аналогично показывается, что случай $w = h(y,z)x^{\gamma}$ также не возможен.

Случай 3: $w(x,y,z) = w(x,y)$.
В этом случае равенство (10.1.18) переписывается как

$$w(w(x,y), w(x,t)) = w(y,t). \tag{10.1.20}$$

Мы знаем, что $l(w(x,y)) = k \geq 2$, и, для начала, предположим, что $l_x(w(x,y)) = m \geq 2$. Тогда

$$l_x(w(w(x,y), w(x,t))) \geq 2(m-1) + (m-2)(k-2) \geq 2(m-1) > 0.$$

А значит, $w(w(x,y), w(x,t))$ зависит от x. Таким образом, получаем что $l_x(w(x,y)) = m = 1$ или, эквивалентно, $w(x,y) \equiv y^a x^b y^c$, где $b \neq 0$.

Несложно доказать, что $w(x,y) \equiv y^a x^b y^c$ удовлетворяет (10.1.20) если и только если $w \equiv x^{-1}y$ или $w \equiv yx^{-1}$. □

Замечание 10.77. Пусть $P_{13}(x,y,z) = (z,y,x)$ — перестановка первой и третьей компоненты и $R(x,y,z) = (x,y,w(x,y,z))$ — 3-элементарное решение TE, тогда

$$P_{13}RP_{13}(x,y,z) = (w(z,y,x),y,z)$$

1-элементарное решение TE.

Описание вербальных 2-элементарных решений TE даёт следующая теорема.

Теорема 10.78. *Пусть $R\colon G^3 \to G^3$ — вербальное 2-элементарное решение TE в любой группе G, тогда выполненно одно из утверждений:*

1. *$R(x,y,z)=(x,w(x,z),z)$, где $w\equiv xz$ или $w\equiv zx$,*
2. *$R(x,y,z)=(x,w(x,y),z)$, где $R'(x,y)=(x,w(x,y))$ — решение YBE для любой группы G,*
3. *$R(x,y,z)=(x,w(y,z),z)$, где $R'(y,z)=(y,w(z,y))$ — решение YBE для любой группы G.*

Доказательство. Если

$$R(x,y,z)=(x,w(x,y,z),z),\quad x,y,z\in G,$$

решение TE, то согласно Следствию 9.60

$$w(w(x,y,z),w(x,t,p),q)=w(x,w(y,t,q),w(z,p,q)). \tag{10.1.21}$$

Предположим, для начала, что w не зависит от x, т.е. $w(x,y,z)=w(y,z)$. В этом случае равенство (10.1.21) принимает форму

$$w(w(t,p),q)=w(w(t,q),w(p,q)).$$

А значит, $R'(y,z)=(y,w(z,y))$ — решение уравнения YBE для любой группы G.

Предположим, далее, что $w(x,y,z)$ зависит от x. Рассмотри 3 случая:

Случай 1: $w(x,y,z)=w(x,z)$.

В этом случае равенство (10.1.21) переписывается в виде

$$w(w(x,z),q)=w(x,w(z,q)). \tag{10.1.22}$$

Пусть $l_2(w(x_1,x_2))=k\geq 1$ и $l_1(w(x_1,x_2))=m\geq 1$. Из равенства (10.1.22) и Леммы 10.73 имеем

$$m=l_x(w(x,w(z,q)))=l_x(w(w(x,z),q))\geq (k-1)m.$$

Таким образом $l_2(w(x_1,x_2))\in\{1,2\}$. Аналогично, $l_1(w(x_1,x_2))\in\{1,2\}$. И, с помощью непосредственных вычислений, получаем два решения: $w(x,z)\equiv xz$ и $w(x,z)\equiv zx$.

Случай 2: $w(x,y,z)=w(x,y,z)$.

Пусть $m=l_1(w(x_1,x_2,x_3))$ и $n=l_3(w(x_1,x_2,x_3))$. Тогда

$$w\equiv \omega_1(x_1,x_2)\,x_3^{\alpha_1}\,\omega_2(x_1,x_2)\ldots x_3^{\alpha_n}\,\omega_{n+1}(x_1,x_2).$$

Предположим, что $m\geq 3$. Легко видеть, что

$$m=l_x(w(x,w(y,t,q),w(z,p,q)))=\sum_{i=1}^{n+1} l_x(\omega_i(w(x,y,z),w(x,t,r))).$$

Предположим, что существует подслово $\omega_j(x_1, x_2)$ в слове w такое, что $k = l(\omega_j(x_1, x_2)) > 1$. Тогда, по Лемме 10.74, мы имеем

$$m \geq l_x(\omega_j(w(x, y, z), w(x, t, r))) \geq 2(m-1) + (m-2)(k-2) \geq 2m - 2 > m.$$

Значит, все подслова $\omega_i(x_1, x_2)$ имеют единичную слоговую длину, т.е. $\omega_i(x_1, x_2) \equiv x_1^{\alpha_i}$ или $\omega_i(x_1, x_2) \equiv x_2^{\beta_i}$. По лемме 10.73 имеем $l_x(\omega_j(w(x, y, z), w(x, t, r))) \geq m$. Таким образом, в сумме выше $l+1 = 1$, но слово w зависит от x_3. Следовательно, $m \in \{1, 2\}$.

Подобным способом устанавливается, что $n \in \{1, 2\}$. Остаётся лишь конечное число возможных вариантов слова w. Непосредственной проверкой несложно убедиться, что ни один из них не является решением.

Случай 3: $w(x, y, z) = w(x, y)$.
В этом случае равенство (10.1.18) преобразуется в

$$w(w(x, y), w(x, t)) = w(x, w(y, t)). \tag{10.1.23}$$

А значит, $R'(x, y) = (x, w(x, y))$ является решением YBE для любой группы G. ☐

Из этих результатов следует, что не существует нетривиальных обратимых элементарных вербальных решений TE на свободных неабелевых группах. Мы не знаем, существуют ли такие неэлементарные решения. С другой стороны, И. Г. Корепанов построил нетривиальное обратимое решение 4-SE на свободной неабелевой группе.

Пример 10.79 (И. Г. Корепанов)**.** Пусть G — произвольная группа и a, b — некоторые фиксированные два элемента из G. Тогда отображение

$$(x, y, z, w) \mapsto (yw^{-1}a, xbz, w, z), \quad x, y, z, w \in G,$$

определяет решение 4-SE на G. Легко видеть, что при $a = b = 1$, это решение является вербальным.

Определение 10.80. Пусть $R : F_n \to F_n$ — эндоморфизм свободной группы заданный на порождающих,

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

и пусть $\mathcal{V}$ — многообразие групп. Будем говорить, что R задаёт *универсальное вербальное $\mathcal{V}$-решение* n-SE, если (G, R) является решением для любой группы $G \in \mathcal{V}$. Если $\mathcal{V}$ — многообразие абелевых групп, мы будем говорить об универсальных вербальных абелевых решениях, если $\mathcal{V}$ — многообразие нильпотентных групп, мы будем говорить об универсальных вербальных нильпотентных решениях, и так далее.

10.2. Вербальные решения в абелевых группах.

Чтобы найти универсальные вербальные абелевы решения n-SE можно рассмотреть свободную абелеву группу ранга n. Вербальные решения n-SE на свободной абелевой группе $\mathbb{Z}^n$ находятся в однозначном соотвествии с линейными решениями над кольцом $\mathbb{Z}$. Любой линейное решение R над $\mathbb{Z}$ может быть записанно с помощью матрицы:

$$R(x) = Mx, \quad x \in \mathbb{Z}^n, \ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}).$$

Предложение 10.81. *Если отображение R заданное матрицей M является решением n-SE, тогда отображение, определяемое транспонированной матрицей M^T также является решением n-SE.*

Для некоторых случаев решения уравнений n-симплексов известны. Например, все линейные биективные решения 2-SE, 3-SE and 4-SE перечисленны в [25]. Поэтому мы можем перечислить все универсальные абелевы решения в этих случаях.

Предложение 10.82. *Пусть G — абелева группа, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Тогда все универсальные вербальные решения YBE заданы следующими отображениями:*

$$\begin{aligned}
(a, b) &\mapsto (a^\alpha, b^\beta);\\
(a, b) &\mapsto (b, a);\\
(a, b) &\mapsto (a^\alpha b^{1-\alpha\beta}, b^\beta);\\
(a, b) &\mapsto (a^\alpha, a^{1-\alpha\beta} b^\beta),
\end{aligned}$$

где $a, b \in G$.

Предложение 10.83. *Пусть G — абелева группа, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Тогда все универсальные вербальные решения TE получаются либо из k-амальгам решений YBE и уравнения 1-симплекса или из списка отображений ниже, с помощью сопряжений из Предложения 4.11 и транспонирований из Предложения 10.81.*

$$\begin{aligned}
(a, b, c) &\mapsto (a^\alpha, a, a^{-\beta} b c^\beta);\\
(a, b, c) &\mapsto (b, a, a^{-\alpha} b c^\alpha);\\
(a, b, c) &\mapsto (a^\alpha b^{1-\alpha\beta} c^{\alpha(\beta\gamma-1)}, b^\beta c^{1-\beta\gamma}, c^\gamma);\\
(a, b, c) &\mapsto (a^\alpha b^{1-\alpha\beta} c^{\gamma(\alpha\beta-1)}, b^\beta c^{1-\beta\gamma}, c^\gamma);
\end{aligned}$$

где $a, b, c \in G$.

Предложение 10.84. *Пусть G — абелева группа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. Тогда все универсальные вербальные решения 4-SE получаются либо из k-амальгам решений m-SE с $m < 4$ или из списка отображений ниже, с помощью сопряжений из Предложения 4.11 и транспонирований из Предложения 10.81.*

$$
\begin{aligned}
&(a,b,c,d) \mapsto (bd^{-1}, ac, d, c);\\
&(a,b,c,d) \mapsto (bc^{-\alpha}d^{\alpha\beta-1}, ac, c^{\alpha}d^{1-\alpha\beta}, d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (b, a, a^{-\alpha}bc^{\alpha}, a^{\alpha\beta-1}c^{1-\alpha\beta}d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (bc^{-\alpha}d^{\alpha\beta}, acd^{-\beta}, c^{\alpha}d^{1-\alpha\beta}, d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (b, a, a^{-\alpha}bc^{\alpha}, a^{\alpha\beta}b^{-\beta}c^{1-\alpha\beta}d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}bc^{-\alpha}, c, b, b^{-\beta}cd^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}, bcd^{-\beta}, a^{-\alpha}bd, d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}bc^{-\alpha}d^{\alpha\beta}, cd^{-\beta}, bd, d^{\beta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}b^{1-\alpha\beta}c^{\gamma(\alpha\beta-1)}d^{\gamma\delta(1-\alpha\beta)}, b^{\beta}c^{1-\beta\gamma}d^{\delta(\beta\gamma-1)}, c^{\gamma}d^{1-\gamma\delta}, d^{\delta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}b^{1-\alpha\beta}c^{\alpha(\beta\gamma-1)}d^{\alpha\delta(1-\beta\gamma)}, b^{\beta}c^{1-\beta\gamma}d^{\delta(\beta\gamma-1)}, c^{\gamma}d^{1-\gamma\delta}, d^{\delta});\\
&(a,b,c,d) \mapsto (a^{\alpha}b^{1-\alpha\beta}c^{\alpha(\beta\gamma-1)}d^{\alpha\beta(1-\gamma\delta)}, b^{\beta}c^{1-\beta\gamma}d^{\beta(\gamma\delta-1)}, c^{\gamma}d^{1-\gamma\delta}, d^{\delta}),
\end{aligned}
$$

где $a, b, c, d \in G$.

§ 11. Вопросы для дальнейшего изучения

Под конец мы хотели бы предложить некоторые вопросы для дальнейшего изучения.

1. Найти вербальные универсальные решения уравнений n-симплексов а классе всех групп.

2. Известно, что группа кос соответсвует YBE. Какие группы соответствуют уравнениям n-симплексов?

3. В [43, 44] были определены мульти-переключатели. Можно ли использовать их для построения решений параметрических YBE?

Список литературы

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 5-72
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-72

1. *Бухштабер В. М.* Отображения Янга–Бакстера // *УМН.* 1998. Т. 53, № 6. С. 241–242.

2. *Янг С. Н.* Некоторые точные результаты для задачи о множестве тел в одном измерении с отталкивающим взаимодействием дельта-функций. // *Physical Review Letters.* 1967. Т. 19, С. 1312–1315.

3. *Бакстер Р. Дж.* Статистическая сумма для модели решетки с восемью вершинами // *Ann. Physics.* 1972. Т.. 70, С. 193–228.

4. *Замолодчиков А. Б.* Уравнения тетраэдров и интегрируемые системы в трехмерном пространстве // *ЖЭТФ.* 1980. Т. . 52, №. 2. С. 325-326.

5. *Замолодчиков А. Б.* Уравнения тетраэдра и релятивистская S-матрица прямых струн в 2+1 измерениях // *Commun. Math. Phys.* 1981. Т. . 79, С. 489–505.

6. *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А. и Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи // *ТМФ.* 1979. Т. 40, № 2. С. 194–220;

7. *Тахтаджян Л. А. и Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // *УМК.* 1979. Т. 34, № 5. С. 13–63

8. *Кричевер И. М.* Уравнения Бакстера и алгебраическая геометрия // *Функц. анализ и его прил.* 1981. Т. 15, № 2. С. 92–103.

9. *Хиетаринта Дж.* Все решения постоянного квантового уравнения Янга–Бакстера в двух измерениях // *Phys. Lett. A.* 1992. Т. 165, № 3. С. 245–251.

10. *Дринфельд В. Г.* О некоторых нерешенных проблемах квантовой теории групп // *Квантовые группы.* 1992. Т. 1510, Конспекты лекций по математике. 1–8.

11. *Этингоф П., Шедлер Т. и Соловьев А.* Теоретико-множественные решения квантового уравнения Янга-Бакстера // *Duke Math. J.* 1999. Т. 100, № 2. С. 169–209.

12. *Джойс Д. и Морли М. Д.* Классифицирующий инвариант узлов, квандл узла // *J. Pure Appl. Algebra.* 1982. Т. 23, № 1. С. 37–65.

13. *Матвеев С.* Дистрибутивные группоиды в теории узлов // *Матем. сб.* 1982. Т. 119 (161), № 1(9). С. 78–88

14. *Дынников И. А.* Об одном отображении Янга - Бакстера и упорядочении Деорнуа // *УМН.* 2002. Т. 57, № 3. С. 592–594.

15. *Лу Дж., Ян М. и Чжу Ю.* О теоретико-множественном уравнении Янга-Бакстера // *Duke Math. J.* 2000. Т. 104, С. 1–18.

16. *Преображенская М. М. и Талалаев Д. В.* Расширения групп, расслоения и параметрическое уравнение Янга–Бакстера // *ТМФ.* 2021. Т. 207, № 2. С. 670–677.

17. *Бухштабер В., Игонин С., Константину-Ризос С. и Преображенская М.* Отображения Янга–Бакстера, преобразования Дарбу и линейные аппроксимации задач рефакторизации // *J. Phys. A.* 2020. Т. 53(50), 504002, 22 с.

18. *Раммп В.* Модули над фигурными скобками // *Algebra Discrete Math.* 2006. № 2. С. 127–137.

19. *Раммп В.* Скобки, радикальные кольца и квантовое уравнение Янга-Бакстера // *J. Algebra* 2007. Т. 307, № 1. С. 153–170.

20. *Курош А. Г.* Лекции 1969-1970 учебного года // *Москва: Наука.* 1974.

21. *Седо́ Ф., Йесперс Э. и Окнински Дж.* Брекеты и уравнение Янга–Бакстера // *Comm. Math. Phys.* 2014. Т. 327, № 1. С. 101–116.

22. *Гуарниери Л. и Вендрамин Л.* Косые скобки и уравнение Янга–Бакстера // *Math. Comp.* 2017. Т. 86, С. 2519–2534.

23. *Корепанов И. Г., Шарыгин Г. И.и Талалаев Д. В.* Интегрируемые трехмерные статистические модели на шестивалентных графах // *Труды МИАН.* 2018. Т. 302, № 2. С. 198–216.

24. *Корепанов И. Г., Шарыгин Г. И.и Талалаев Д. В.* Когомологии n-симплексных отношений // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2016. Т. 161, № 2. С. 203–222.

25. *Хиетаринта Дж.* Решения перестановочного типа уравнений Янга–Бакстера и других n-симплексных уравнений // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1997. Т. 30, С. 4757–4771.

26. *Кассотакис П., Нишпорски М., Папагеоргиуанд В. и Тонгас А.* Отображения тетраэдров и симметрии трехмерных интегрируемых дискретных уравнений // arXiv:1908.03019.

27. *Бажанов В. В. и Строганов Ю. Г.* Условия коммутативности трансфер-матриц на многомерной решетке // *ТМФ.* 1983. № 52. С. 685–691.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 5-72
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-72

28. *Быцко А. и Волков А.* Уравнение тетраэдра и тождества циклических квантовых дилогарифмов // *International Mathematics Research Notices.* 2015. Т. 20, С. 1075–1100.

29. *Картер Дж. и Сайто М.* О формулировке и решении симплексных уравнений // *Int. J. Mod. Phys. A..* 1996. Т. 11, С. 4453–4463.

30. *Димакис А. и Корепанов И. Г.* Параметризованные Грассманом решения многоугольных и симплексных уравнений с прямой суммой // *J. Math. Phys.* 2021. Т. 62, doi: 10.1063/5.0035760

31. *Кашаев Р. М.* О дискретных трехмерных уравнениях, связанных с локальным соотношением Янга–Бакстера // *Lett. Math. Phys.* 1996. Т. 35, С. 389–397.

32. *Сергеев С. М.* Решения функционального уравнения тетраэдра, связанного с локальным уравнением Янга-Бакстера для сегнетоэлектрического состояния // *Lett. Math. Phys.* 1998. Т. 45, С. 113–119.

33. *Соловьев А.* Неунитарные теоретико-множественные решения квантового уравнения Янга–Бакстера // *Math. Res. Lett.* 2000. № 7. С. 577–596.

34. *Бачиллер Д.* Решения уравнения Янга–Бакстера, связанного с наклоном левых фигурных скобок, с применением к стойкам // *J. Knot Theory Ramif.* 2018. Т. 27, № 8. 1850055.

35. *Кауфман Л.* Теория виртуальных узлов // *Eur. J. Comb.* 1999. Т. 20, № 7. С. 663–690. European Journal of Combinatorics-Европейский журнал комбинаторики

36. *Белавин А. А. и Дринфельд В. Г.* Решения классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли // *Функц. анализ и его прил.* 1982. Т. 16, № 3. С. 1–29.

37. *Кассотакис П. и Кулукас Т.* О неабелевых квадрирациональных отображениях Янга-Бакстера. // arXiv:2109.11975, 2021.

38. *Кулиш П. П. и Склянин Е. К.* О решениях уравнения Янга–Бакстера // *Зап. научн. сем. ЛОМИ.* 1982. Т. 19, № 5. С. 1596–1620.

39. *Гратцер Г. А.* Универсальная алгебра (2-е изд.) // *Springer Science and Business Media.* 2008.

40. *Бардаков В. Г. и Нещадим М. В.* О представлении виртуальных кос автоморфизмами // *Алгебра и логика.* 2017. № 5. С. 355–361.

41. *Бардаков В., Михальчишина Ю. и Нещадим М.* Представления виртуальных кос автоморфизмами и группами виртуальных узлов // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. Т. 26, № 1. 1750003.

42. *Маклейн С.* Категории для работающего математика // *Дипломные тексты по математике.* 1971.

43. *Бардаков В. Г. и Насыбуллов Т. Р.* Мультипереключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных зацеплений // *Алгебра и логика.* 2020. Т. 59, № 4. С. 500–506.

44. *Бардаков В. Г. и Насыбуллов Т. Р.* Мультипереключатели и инварианты виртуальных узлов // *Topology Appl.* 2021. Т. 293, 107552, 22 с.

References

1. *Bukhshtaber V. M.* Yang–Baxter mappings // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1998. V. 53, № 6. P. 241–242.

2. *Yang C. N.* Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction. // *Phys. Rev. Lett.* 1967. V. 19, P. 1312–1315.

3. *Baxter R. J.* Partition function of the eight-vertex lattice model // *Ann. Physics.* 1972. V. 70, P. 193–228.

4. *Zamolodchikov A. B.* Tetrahedra equations and integrable systems in three dimensional space // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1980. V. 52, № 2. P. 325–326.

5. *Zamolodchikov A. B.* Tetrahedron equations and the relativistic S-matrix of straight-strings in 2+1 dimensions // *Commun. Math. Phys.* 1981. V. 79, P. 489–505.

6. *Sklyanin E. K., Takhtadzhyan L. A. and Faddeev L. D.* The quantum inverse problem method // *Theor. and Math. Phys.* 1979. V. 40, № 2. P. 194–220;

7. *Takhtadzhyan L. A. and Faddeev L. D.* The quantum method for the inverse problem and the XYZ Heisenberg model // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1979. V. 34, № 5. P. 13–63

8. *Krichever I. M.* Baxter's equations and algebraic geometry // *Funct. Anal. Appl.*. 1981. V. 15, № 2. P. 92–103.

9. *Hietarinta J.* All solutions to the constant quantum Yang–Baxter equation in two dimensions // *Phys. Lett. A.* 1992. V. 165, № 3. P. 245–251.

10. *Drinfeld V. G.* On some unsolved problems in quantum group theory // *Quantum groups.* 1992. V. 1510, Lecture Notes in Math. 1–8.

11. *Etingof P., Schedler T. and Soloviev A.* Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation // *Duke Math. J.* 1999. V. 100, № 2. P. 169–209.

12. *Joyce D. and Morley M. D.* A classifying invariant of knots, the knot quandle // *J. Pure Appl. Algebra.* 1982. V. 23, № 1. P. 37–65.

13. *Matveev S.* Distributive groupoids in knot theory // *Mat. Sb. (N.S.)* 1982. V. 119 (161), № 1(9). P. 78–88

14. *Dynnikov I. A.* On a Yang–Baxter map and the Dehornoy ordering // *Russian Math. Surveys.* 2002. V. 57, № 3. P. 592–594.

15. *Lu J., Yan M. and Zhu Y.* On the set-theoretical Yang-Baxter equation // *Duke Math. J.* 2000. V. 104, P. 1–18.

16. *Preobrazhenskaya M. M. and Talalaev D. V.* Group extensions, fiber bundles, and a parametric Yang–Baxter equation // *Theoret. and Math. Phys.* 2021. V. 207, № 2. P. 670–677.

17. *Bukhshtaber V., Igonin S, Konstantinou-Rizos S. and Preobrazhenskaia M.* Yang–Baxter maps, Darboux transformations, and linear approximations of refactorisation problems // *J. Phys. A.* 2020. V. 53:50, 504002, 22 pp.

18. *Rump W.* Modules over braces // *Algebra Discrete Math.* 2006. N 2. P. 127–137.

19. *Rump W.* Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation // *J. Algebra* 2007. V. 307, N 1. P. 153–170.

20. *Kurosh A. G.* Lectures of the 1969-1970 Academic Year // *Moscow: Nauka.* 1974.

21. *Cedó F., Jespers E. and Okniński J.* Braces and the Yang–Baxter equation // *Comm. Math. Phys.*. 2014. V. 327, № 1. P. 101–116.

22. *Guarnieri L. and Vendramin L.* Skew braces and the Yang–Baxter equation // *Math. Comp..* 2017. V. 86, P. 2519–2534.

23. *Korepanov I. G., Sharygin G. I.and Talalaev D. V.* Integrable 3D statistical models on six-valent graphs // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2018. V. 302, № 2. P. 198–216.

24. *Korepanov I. G., Sharygin G. I.and Talalaev D. V.* Cohomologies of n-simplex relations // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2016. V. 161, № 2. P. 203–222.

25. *Hietarinta J.* Permutation-type solutions to the Yang–Baxter and other n-simplex equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1997. V. 30, P. 4757–4771.

26. *Kassotakis P., Nieszporski M., Papageorgiouand V. and Tongas A.* Tetrahedron maps and symmetries of three dimensional integrable discrete equations // arXiv:1908.03019.

27. *Bazhanov V. V. and Stroganov Yu. G.* Commutativity conditions for transfer matrices on a multidimensional lattice // *Theor. Mat. Fiz.* 1983. № 52. P. 685–691.

28. *Bytsko A. and Volkov A.* Tetrahedron equation and cyclic quantum dilogarithm identities // *International Mathematics Research Notices.* 2015. V. 20, P. 1075–1100.

29. *Carter J. and Saito M.* On Formulation and Solutions of Simplex Equations // *Int. J. Mod. Phys. A.* 1996. V. 11, P. 4453–4463.

30. *Dimakis A. and Korepanov, I. G.* Grassmannian-parameterized solutions to direct-sum polygon and simplex equations // *J. Math. Phys.* 2021. V. 62, doi: 10.1063/5.0035760

31. *Kashaev R. M.* On discrete 3-dimensional equations associated with the local Yang–Baxter relation // *Lett. Math. Phys.* 1996. V. 35, P. 389–397.

32. *Sergeev S. M.* Solutions of the Functional Tetrahedron Equation Connected with the Local Yang-Baxter Equation for the Ferro-Electric Condition // *Lett. Math. Phys.* 1998. V. 45, P. 113–119.

33. *Soloviev A.* Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation // *Math. Res. Lett.* 2000. № 7. P. 577–596.

34. *Bachiller D.* Solutions of the Yang–Baxter equation associated to skew left braces, with applications to racks // *J. Knot Theory Ramif.* 2018. V. 27, № 8. 1850055.

35. *Kauffman L.* Virtual knot theory // *Eur. J. Comb.* 1999. V. 20, N 7. P. 663–690.

36. *Belavin A. A. and Drinfeld V. G.* Solutions of the classical Yang–Baxter equation for simple Lie algebras // *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 1982. V. 16, № 3. P. 1–29.

37. *Kassotakis P. and Kouloukas T.* On non-abelian quadrirational Yang-Baxter maps. // arXiv:2109.11975, 2021.

38. *Kulish P. P. and Sklyanin E. K.* Solutions of the Yang-Baxter equation // *J. Soviet Math.* 1982. V. 19, № 5. P. 1596–1620.

39. *Gratzer G. A.* Universal Algebra (2nd ed.) // *Springer Science and Business Media.* 2008.

40. *Bardakov V. G. and Neshchadim M. V.* On a representation of virtual braids by automorphisms // *Algebra Logic.* 2017. № 5. P. 355–361.

41. *Bardakov V., Mikhalchishina Yu. and Neshchadim M.* Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. V. 26, № 1. 1750003.

42. *MacLane S.* Categories for the Working Mathematician // *Graduate texts in mathematics.* 1971.

43. *Bardakov V. G. and Nasybullov T. R.* Multi-switches, representations of virtual braids and invariants of virtual links // *Algebra Logika.* 2020. V. 59, № 4. P. 500–506.

44. *Bardakov V. G. and Nasybullov T. R.* Multi-switches and virtual knot invariants // *Topology Appl.* 2021. V. 293, 107552, 22 pp.

Информация об авторах

Валерий Георгиевич Бардаков, доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 4500-3080, AuthorID 5362
Scopus Author ID 35614009800

Богдан Бахтиярович Чужинов, аспирант
Scopus Author ID 57221155230

Иван Александрович Емельяненков, аспирант
Scopus Author ID 57215001137

Максим Эдуардович Иванов, ассистент, аспирант
SPIN 8843-3680, AuthorID 1015165
Scopus Author ID 57219028610

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 5-72
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 5-72

Татьяна Анатольевна Козловская, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 4628-8890, AuthorID 673411
Scopus Author ID 41961511800
Вадим Эдуардович Лешков, аспирант
Scopus Author ID 57767839000

Author information

Valeriy G. Bardakov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 4500-3080, AuthorID 5362
Scopus Author ID 35614009800
Bogdan B. Chuzinov, Graduate student
Scopus Author ID 57221155230
Ivan A. Emel'yanenkov, Graduate student
Scopus Author ID 57215001137
Maxim E. Ivanov, Assistant
SPIN 8843-3680, AuthorID: 1015165
Scopus Author ID 57219028610
Tatyana A. Kozlovskaya, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 4628-8890, AuthorID: 673411
Scopus Author ID 41961511800
Vadim E. Leshkov, Graduate student
Scopus Author ID 57767839000

*Статья поступила в редакцию 23.07.2023;
одобрена после рецензирования 23.11.2023; принята к публикации 17.05.2024*

*The article was submitted 23.07.2023;
approved after reviewing 23.11.2023; accepted for publication 17.05.2024*